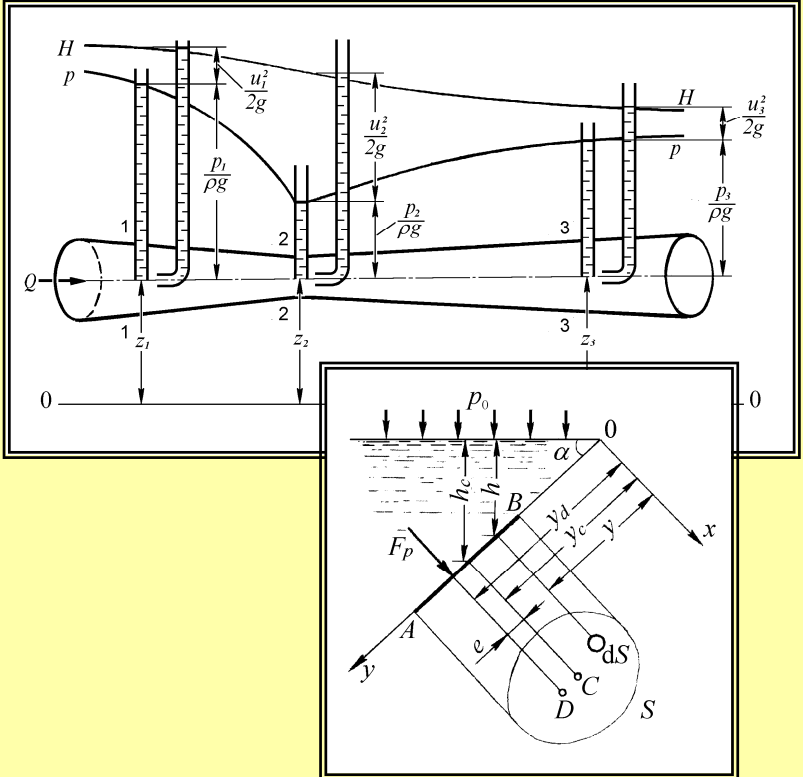


Л. В. Возняк, П. Р. Гімер,
М. І. Мердух, О. В. Паневник

ГІДРАВЛІКА

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний
технічний університет нафти і газу**

**Л. В. Возняк, П. Р. Гімер,
М. І. Мердух, О. В. Паневник**

ГІДРАВЛІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Івано-Франківськ
2012**

УДК 532 (075.8)
ББК 30.123
Г-46

Рецензенти:

- В. Я. Грудз** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри спорудження та ремонту газонафтопроводів і газонафтосховищ Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу;
- В. М. Кланічка** професор, завідувач кафедри теоретичної фізики Прикарпатського національного університету ім. Василя Стефаника;
- В. В. Чернюк** доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри гідравліки і сантехніки Національного університету Львівська політехніка

Возняк Л. В., Гімер П. Р., Мердух М. І., Паневник О. В.

Г-46 Гідравліка : навчальний посібник / Л. В. Возняк, П. Р. Гімер, М. І. Мердух, О. В. Паневник. — Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2012. — 327 с. : іл.

Розглянуті фізичні властивості рідин, основні закони гідростатики, кінематики та динаміки рідин і режими руху рідин; втрати напору на тертя і в місцевих опорах, особливості витікання рідин через отвори та насадки, розрахунку трубопроводів і неусталеного руху; рівняння безнапірного руху рідин в лотках, обтікання тіл потоком рідини і двохфазної течії рідин в трубах. Окремо розглянуті реологічні властивості неньютонівських рідин і методи їх дослідження. Матеріал ілюструється прикладами в явній і неявній формах розв'язку і містить питання для самоперевірки та контрольні тестові завдання.

Навчальний посібник розрахований на студентів спеціальностей нафтогазового профілю, інженерно-механічних і технологічних спеціальностей технічних вузів. Може бути використаний інженерно-технічними працівниками підприємств нафтогазової галузі, проектними та науково-дослідними організаціями.

УДК 532 (075.8)
ББК 30.123

МВ 02070855-3891-2012

© Возняк Л. В., Гімер П. Р.,
Мердух М. І., Паневник О. В.
© ІФНТУНГ, 2012

ЗМІСТ

Передмова	9
Позначення основних і похідних величин	11
1 Загальні відомості про рідину	14
1.1 Модель крапельної рідини.....	14
1.2 Сили, які діють на рідину	15
1.3 Тиск у рідині	17
1.3.1 Основна властивість гідростатичного тиску.....	18
1.3.2 Одиниці вимірювання тиску	19
1.4 Фізичні властивості рідин	22
1.5 Питання і завдання для самоперевірки	28
2 Гідростатика	30
2.1 Диференціальне рівняння рівноваги рідини	30
2.2 Інтегрування диференціального рівняння рівноваги рідини.....	33
2.2.1 Основне рівняння гідростатики	33
2.2.2 Відносний спокій рідини при обертанні посудини навколо вертикальної осі.....	36
2.2.3 Відносний спокій рідини в посудині, що рухається прямо-лінійно з прискоренням.....	41
2.3 Епюри гідростатичного тиску	44
2.4 Прилади для вимірювання тиску	45
2.5 Закон сполучених посудин.....	51
2.6 Закон Паскаля і його практичне значення	53
2.7 Сила тиску рідини на плоскі поверхні	56
2.7.1 Визначення величини сили тиску на плоску поверхню.....	56
2.7.2 Знаходження точки прикладання сили надлишкового тиску рідини на плоску поверхню	59
2.8 Сила тиску рідини на криволінійні поверхні.....	61
2.8.1 Визначення товщини стінки труб	66
2.9 Закон Архімеда і основи теорії плавання тіл.....	67

2.10 Питання і завдання для самоперевірки	71
3 Кінематика та динаміка рідин (гідродинаміка)	74
3.1 Завдання і методи досліджень	74
3.2 Види руху рідин	75
3.3 Модель елементарної струминки ідеальної рідини	77
3.4 Витрата та рівняння нерозривності струминки рідини	78
3.5 Диференціальне рівняння нерозривності потоку рідини	80
3.6 Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини	83
3.7 Рівняння Бернуллі для струминки ідеальної нестисливої рідини	84
3.8 Геометричний та фізичний зміст рівняння Бернуллі	87
3.9 Рівняння Бернуллі для струминки реальної нестисливої рідини	91
3.10 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини	94
3.11 Приклади застосування рівняння Бернуллі на практиці	100
3.11.1 Визначення витрати рідини	100
3.11.2 Розрахунок висоти всмоктування відцентрового насоса	101
3.11.3 Визначення величини вакууму ежекторної установки	103
3.11.4 Розрахунок необхідного тиску на викидній лінії насоса	105
3.12 Рівняння кількості руху для потоку рідини	106
3.13 Питання і завдання для самоперевірки	109
4 Режими течії рідини і гідравлічні опори	111
4.1 Режими течії рідини	111
4.1.1 Число Рейнольдса та критична швидкість течії рідини	112
4.1.2 Визначення режиму течії рідини в некруглих трубах	115
4.2 Теорія ламінарної течії в круглих трубах	117
4.2.1 Початкова ділянка ламінарної течії	123
4.2.2 Гідродинамічна теорія змашення	125
4.3 Основні визначення турбулентної течії рідини	129
4.3.1 Поняття про гладкі і шорсткі труби	135
4.3.2 Вплив різних факторів на коефіцієнт гідравлічного опору λ	139
4.3.3 Формули для визначення коефіцієнта гідравлічного опору	143

4.3.4	Визначення коефіцієнта гідравлічного опору згідно з нормами технологічного проектування	146
4.3.5	Узагальнена формула Л. С. Лейбензона для визначення втрат напору.....	148
4.3.6	Визначення втрат напору у водопровідних трубах	151
4.4	Питання і завдання для самоперевірки	152
5	Місцеві опори	155
5.1	Класифікація місцевих опорів та визначення втрат напору.....	155
5.2	Визначення втрат напору при раптовому розширенні (теорема Карно-Борда)	156
5.3	Коефіцієнт місцевого опору при раптовому розширенні	159
5.4	Коефіцієнт місцевого опору при раптовому звуженні.....	159
5.5	Коефіцієнт місцевого опору при поступовому розширенні	161
5.6	Коефіцієнт місцевого опору при поступовому звуженні	163
5.7	Значення коефіцієнтів окремих місцевих опорів	164
5.8	Залежність коефіцієнтів місцевих опорів від режиму течії.....	170
5.9	Коефіцієнт опору системи.....	172
5.10	Еквівалентна та розрахункова довжина трубопроводів.....	173
5.11	Питання і завдання для самоперевірки	174
6	Витікання рідини з отворів та насадок	177
6.1	Загальна характеристика процесу витікання рідини.....	177
6.2	Витікання рідини через малі отвори в тонкій стінці	177
6.3	Витікання рідини через затоплений отвір.....	184
6.4	Витікання рідини через великі отвори в боковій стінці	187
6.5	Витікання рідини через насадки при сталому напорі	189
6.6	Витікання рідини через отвори і насадки при змінному напорі	195
6.7	Питання і завдання для самоперевірки	199
7	Гідравлічний розрахунок трубопроводів	201
7.1	Призначення та класифікація трубопроводів	201
7.2	Основні задачі розрахунку трубопроводів.....	203
7.3	Розрахунок простих трубопроводів.....	203

7.3.1	Визначення необхідного тиску на початку трубопроводу	203
7.3.2	Визначення пропускної здатності трубопроводу	207
7.3.3	Визначення необхідного діаметра трубопроводу	211
7.3.4	Графоаналітичний метод гідравлічного розрахунку трубопроводу	212
7.3.5	Визначення оптимального діаметра трубопроводу	214
7.4	Розрахунок складних трубопроводів	216
7.4.1	Послідовне з'єднання трубопроводів	216
7.4.2	Паралельне з'єднання трубопроводів	217
7.4.3	Розгалужені трубопроводи	218
7.4.4	Кільцеві (замкнуті) системи трубопроводів	219
7.5	Сифонний трубопровід	221
7.6	Розрахунок насосної установки	226
7.7	Питання і завдання для самоперевірки	228
8	Неусталений рух рідини в трубах	230
8.1	Прямолінійний рух рідини з постійним прискоренням	230
8.2	Обертання потоку навколо вертикальної осі	234
8.3	Гідравлічний удар у трубах	235
8.4	Гідравлічний таран	242
8.5	Питання і завдання для самоперевірки	244
9	Обтікання тіл потоком рідини та вільні струмені	247
9.1	Вільне падіння твердих тіл у рідині	247
9.2	Сила динамічного тиску струменя рідини на стінки	248
9.3	Траєкторія руху вільного струменя	251
9.4	Вертикальні струмені	253
9.5	Питання і завдання для самоперевірки	254
10	Безнапірний усталений рух рідини	256
10.1	Основні рівняння безнапірної течії рідини	256
10.2	Гідравлічно найбільш вигідний переріз каналу	258
10.3	Критична глибина потоку	260
10.4	Рівномірний бурхливий потік	262
10.5	Нерівномірний плавномірний рух у призматичних каналах	263

10.5.1 Особливості формування нерівномірного плавномірного бурхливого потоку.....	265
10.6 Гідралічний стрибок.....	267
10.7 Питання і завдання для самоперевірки	271
11 Усталений рух газорідних сумішей в трубах	273
11.1 Властивості газорідних сумішей	273
11.2 Структури потоків газорідних сумішей.....	278
11.3 Гідралічний розрахунок трубопроводів	281
11.3.1 Низхідна течія рідини	282
11.3.2 Висхідна течія рідини	284
11.3.3 Місцеві опори	285
11.4 Питання і завдання для самоперевірки	286
12 Основи теорії подібності і метода розмірностей.....	288
12.1 Основний закон динамічної подібності потоків.....	288
12.2 Основні критерії гідродинамічної подібності потоків.....	290
12.3 Метод розмірностей.....	295
12.4 Питання і завдання для самоперевірки	298
13 Ньютонівські рідини	300
13.1 Загальні положення та визначення	300
13.2 Рідини, реологічні властивості яких не залежать від часу	301
13.2.1 Бінгамівські пластики	301
13.2.2 Псевдопластики.....	302
13.2.3 Дилатантні рідини	302
13.3 Рідини, реологічні властивості яких залежать від часу	302
13.3.1 Тиксотропні рідини.....	303
13.3.2 Реопектичні рідини	303
13.3.3 В'язкопружні рідини.....	304
13.4 Дослідження стаціонарно-реологічних рідин за допомогою ротаційних віскозиметрів	304
13.4.1 Осьово-циліндричні віскозиметри.....	304
13.4.2 Циліндр, що обертається в необмеженій рідині	305
13.4.3 Віскозиметр типу конус-пластина	305
13.5 Розрахунок втрат напору на тертя	306
13.5.1 Узагальнене число Рейнольдса	306
13.5.2 Визначення коефіцієнта опору.....	307

13.5.3 Ламінарна течія псевдопластичних рідин.....	310
13.5.4 Пластичні рідини	310
13.6 Питання і завдання для самоперевірки	312
Література.....	314
Додатки	316
Додаток А Латинський алфавіт	316
Додаток Б Грецький алфавіт	317
Додаток В Міжнародна система одиниць (СІ).....	318
Додаток Г Множники та префікси утворення кратних і дільових одиниць та їх назва	319
Додаток Д Системи одиниць та їх зв'язок.....	320
Додаток Е Тиск насиченої пари деяких рідин залежно від темпе- ратури ($p_{н.п.} \cdot 10^{-3}$)	320
Додаток Ж Середнє значення густини ρ і кінематичної в'язкості ν деяких рідин	321
Предметний вказівник	322

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник складено на основі курсів лекцій “Гідравліка”, “Аерогідродинаміка полютантів”, “Гідравліка і гідропневмопривод”, “Гідравліка і гідропривод”, які автори читають для інженерно-технічних, механічних і технологічних спеціальностей в Івано-Франківському національному технічному університеті, і підсумовує тридцятирічний досвід роботи кафедри нафтогазової гідромеханіки.

Гідравлічні системи є однією з основних складових структурних елементів більшості механізмів і машин, що реалізують технологічні процеси розроблення нафтогазових родовищ. Ефективність експлуатації об’єктів нафтогазового комплексу визначається значною кількістю факторів, які ускладнюють прогнозування показників робочого процесу бурового, нафтогазопромислового та нафтогазотранспортного обладнання. В цих умовах суттєво зростають вимоги до сучасних методів аналітичного визначення гідродинамічних характеристик гідравлічних систем. Необхідність гідравлічного моделювання робочих процесів різнотипного обладнання стає актуальнішою разом із зменшенням світових запасів енергоносіїв, ускладненням умов їх видобування і, як наслідок, підвищенням цін на нафту і газ.

Методи розрахунку гідравлічних систем вимагають наявності знань та специфічних навиків, які стосуються багатьох галузей інженерної механіки. Невпинне зростання складності конструкції техніки і технології розроблення нафтогазових родовищ вимагає удосконалення існуючих методів розрахунку гідравлічних систем та підвищення кваліфікаційного рівня інженерних працівників, які їх виконують. Процеси, які реалізуються в нафтогазовій галузі, є потенційно небезпечними, часто супроводжуються аваріями і вимагають від обслуговувального персоналу здатності швидко реагувати на проблемні ситуації, пов’язані з рухом нафтогазорідинних сумішей.

З метою полегшення користування навчальним посібником в окремих розділах у стислій формі викладено задачі, що ви-

никають при витіканні рідин через отвори та насадки, неусталеному русі рідини, взаємодії вільних струмин з твердими тілами та стінками, розрахунку складних трубопроводів з використанням всіх існуючих методів. Розглянуто питання безнапірної двофазної і напірної газорідинної течії потоків.

У всіх розділах в явній чи неявній формах є приклади використання отриманих залежностей для розв'язку інженерних задач.

В додатках подано інформативні та довідкові матеріали, які сприятимуть глибшому освоєнню матеріалу і його використанню під час розв'язку інженерних задач.

В підготовці навчального посібника брали участь д.т.н., проф. Паневник О. В. — розділи 1, 2, 3; к.т.н., доц. Возняк Л. В. — розділи 4, 5, 12, 13; к.т.н., доц. Мердух М.І. — розділи 6, 7; к.т.н., доц. Гімер П.Р. — розділи 8, 9, 10, 11.

Позначення основних і похідних величин

Позначення	Назва величини
a	– прискорення, м/с^2
B, b	– ширина, м
c	– швидкість ударної хвилі, м/с
C	– стала величина
C	– швидкісний множник (коефіцієнт Шезі), $\text{м}^{1/2}/\text{с}$
d, D	– діаметр, м
e	– енергія віднесена до одиниці ваги, Дж/Н
E	– енергія, Дж
E	– модуль пружності металів (модуль Юнга), Па
E_k	– кінетична енергія, Дж
E_n	– потенційна енергія, Дж
F	– сила, Н
F_σ	– сила поверхневого натягу, Н
F_g	– сила тяжіння, Н; $F_g = mg$
F_p	– сила тиску, Н; $F_p = pS$
Fr	– критерій гравітаційної подібності (чило Фруда); $\text{Fr} = v^2/gL$
F_{in}	– сила інерції, Н
g	– прискорення вільного падіння, $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$
G	– вага, Н
G	– вагова витрата, Н/с; $G = \rho g Q$
h	– втрати напору, м
h	– глибина, м
H	– напір, м
i	– гідравлічний нахил
i_0	– геометричний нахил
i_p	– п'зометричний нахил
J_0	– центральний момент інерції, м^4
J_x	– момент інерції відносно осі Ox , м^4
k	– міра консистенції рідини
K	– витратна характеристика, $\text{м}^3/\text{с}$
K	– модуль об'ємної пружності рідини, Па
l, L	– довжина, м
m	– маса, кг
M	– момент, Н·м
n	– степінь неньютонівської поведінки рідини

Позна-чення	Назва величини
n	– частота обертання, об/с
N	– потужність, Вт
p	– тиск, Па
p_{am}	– атмосферний тиск, Па; $p_{am} = 101325$ Па
Q	– об'ємна витрата, м ³ /с
Q_m, M	– масова витрата, кг/с; $Q_m = \rho Q$
R	– сила опору (реакція), Н
R, r	– радіус, м
Re	– критерій режиму руху (число Рейнольдса); $Re = \nu d / \nu$
R_z	– гідравлічний радіус, м
S	– площа живого перерізу, м ²
S	– швидкісна характеристика
t	– температура, °С
t	– час, с
T	– абсолютна температура, К; $T = t \text{ °С} + 273,15$
T	– сила тертя, Н; $T = \tau S$
t_ϕ	– фаза гідравлічного удару, с
u	– місцева швидкість, м/с
u	– показник віскограми
U	– силова функція, м ² /с ²
V	– об'єм, м ³
w	– швидкість відносна, м/с
We	– число Вебера; $We = \rho u^2 / \sigma$
X, Y, Z	– проекції одиничних масових сил на осі координат, Н/кг
\dot{y}	– швидкість зсуву
z	– вертикальна координата, м
Δ	– абсолютна шорсткість, мм
Δ_e	– абсолютна еквівалентна шорсткість, мм
α	– коефіцієнт кінетичної енергії (коефіцієнт Коріоліса)
α, β, θ	– кут, °
β_p	– коефіцієнт об'ємного стиснення рідини, 1/Па
β_t	– коефіцієнт температурного розширення рідини, 1/К
χ	– змочений периметр, м
δ	– товщина, м
ε	– коефіцієнт відносної шорсткості; $\varepsilon = \Delta / r$
ε	– коефіцієнт стиснення струмини; $\varepsilon = S_{cm} / S$
γ	– питома вага, Н/м ³ ; $\gamma = \rho g$
η	– коефіцієнт корисної дії
φ	– коефіцієнт швидкості
λ	– коефіцієнт гідравлічного опору (тертя)
μ	– коефіцієнт витрати
μ	– коефіцієнт динамічної в'язкості, Па·с

Позначення	Назва величини
μ_0	– уявна в'язкість, Па·с
μ_p	– пластична в'язкість, Па·с
ν	– коефіцієнт кінематичної в'язкості, м ² /с
π	– стала; $\pi = 3,1415927$
ρ	– густина, кг/м ³
σ	– нормальні напруження, Н/м ²
τ	– дотичні напруження тертя, Н/м ²
ν	– питомий об'єм, м ³ /кг; $\nu = 1/\rho$
v	– середня швидкість, м/с
ω	– кутова швидкість, рад/с
ξ	– коефіцієнт місцевого опору

1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІДИНУ

1.1 Модель крапельної рідини

Для вивчення законів спокою і руху рідин у гідромеханіці використовують модельне уявлення про рідину. Вважається, що рідина — це суцільне середовище, неперервне в просторі. Найменша частинка рідини, яка виділяється при розв'язуванні задачі, містить при цьому достатню кількість молекул, щоб можна було не розглядати взаємодію окремих молекул. Кожній такій частинці рідини можна поставити у відповідність ряд фізичних і динамічних характеристик (густина, швидкість та ін.). А оскільки усі частинки розміщені у просторі неперервно, то і функції, які описують фізико-динамічні характеристики рідини, будуть неперервними.

Згідно з такою моделлю, якщо рідина перебуває у стані спокою, то сила F (рис. 1.1), яка діє на будь-яку виділену довільно орієнтовану в просторі елементарну площадку рідини dS буде діяти паралельно нормалі до цієї площини \vec{n} і буде напрямлена до площини, тобто протилежно напрямку нормалі. Ці дві умови відповідно означають, що у рідині в стані спокою, по-перше, немає дотичних напружень, по-друге, рідина сприймає тільки стискаючі зусилля і не працює на розтяг.

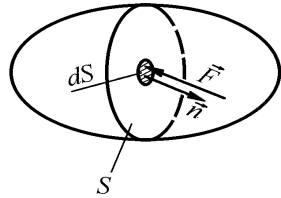


Рисунок 1.1 — Дія сили на виділену площадку рідини

Під час руху рідини крім нормальних виникають ще й дотичні напруження. У зв'язку з цим в гідродинаміці існують дві моделі рідини. Перша з них припускає, що при русі рідини, як і в стані спокою, немає дотичних напружень. Така рідина називається нев'язкою або ідеальною. Друга модель, яка враховує дотичні напруження, називається в'язкою або реальною рідиною. Частинки або шари реальної рідини чинять опір при їх взаємному переміщенні. Величина цього опору визначається залежно від дотичних напружень τ , які, згідно з формулою Ньютона, визначаються прямо пропорційно градієнту швидкості руху шарів рідини:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (1.1)$$

де μ — динамічна в'язкість;
 du/dy — градієнт швидкості.

В гідромеханіці така модель ще має назву «ньютонівська рідина» і вона досить точно описує властивості більшості газів і рідин, які існують в природі. У випадку, коли дотичні напруження не прямо пропорційні градієнту швидкості, модель рідини має назву «неньютонівська рідина». Дана модель представляє такі рідини як розчини глини, вапна, емульсії та різні суспензії.

Закони стану спокою і руху неньютонівських рідин є предметом вивчення спеціальних курсів, таких як гідравліка бурових розчинів, гідротранспорт твердих матеріалів та ін.

1.2 Сили, які діють на рідину

Візьмемо довільно взятий об'єм рідини V , обмежений твердою поверхнею S_m й площинами перерізу S_1 і S_2 (рис. 1.2). Розглянемо, які сили діють на даний об'єм під час рівноприскореного руху. На поверхні S_1 і S_2 діють рівномірно розподілені нормальні сили тиску \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Між твердою поверхнею і поверхнею рідини діє сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. З боку твердої поверхні на поверхню рідини діє реакція першої поверхні \vec{R} на другу. В гідромеханіці перелічені вище сили відносять до *зовнішніх*

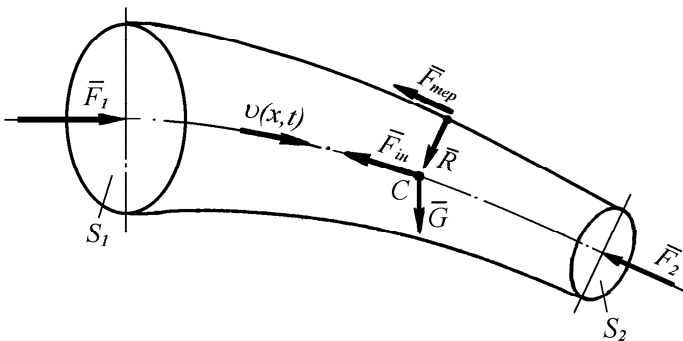


Рисунок 1.2 — Сили, які діють на рідину

сил. На кожен частинку середовища рідини (точка) діють сили ваги та інерції, які в гідромеханіці називають *масовими*.

Сила ваги, яка діє на заданий об'єм рідини, згідно з законом земного тяжіння дорівнює

$$G = mg = \rho gV, \quad (1.2)$$

де m — маса заданого (досліджуваного) об'єму рідини V ;
 g — прискорення вільного падіння ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$ для широт $45\text{-}65^\circ$);

ρ — середнє значення густини рідини в об'ємі V .

Сила інерції виникає при прискореному русі маси рідини і згідно з другим законом Ньютона дорівнює

$$F_{in} = -ma, \quad (1.3)$$

де a — прискорення досліджуваного об'єму рідини.

Знак мінус означає, що напрям сили інерції протилежний напрямку прискорення.

У гідромеханіці часто використовують поняття одиничних масових сил — відношення масової сили, яка діє на виділений об'єм, до маси даного об'єму. У випадку декартової системи координат $Oxyz$, одиничні масові сили X , Y , Z , які діють вздовж відповідних координатних осей будуть рівні

$$X = G_x/m, \quad Y = G_y/m, \quad Z = G_z/m, \quad (1.4)$$

де G_x , G_y , G_z — величина масової сили, яка діє в напрямках відповідних координатних осей на виділений об'єм масою m .

Як було сказано вище, поверхневі сили можуть діяти тільки на граничну поверхню рідини. Вони спричинені безпосередньо дією сусідніх об'ємів або дією інших тіл (тверде середовище, газ). До поверхневих сил відносять силу тиску, силу тертя, а також реакції твердої поверхні, яка обмежує рідину.

При вивченні процесів, які відбуваються в рідині, часто розглядають не весь об'єм, а лише певну його частину. В такому випадку дія масової сили від всієї рідини на виділений об'єм замінюється дією зовнішніх сил.

Як приклад заміни масових сил на поверхневі, розглянемо фіксований об'єм рідини V (рис. 1.3), який перебуває в стані рівноваги. Розділимо даний об'єм на дві частини A і B (рис. 1.3, а) і відкинемо одну з них, наприклад, частину B (рис. 1.3,

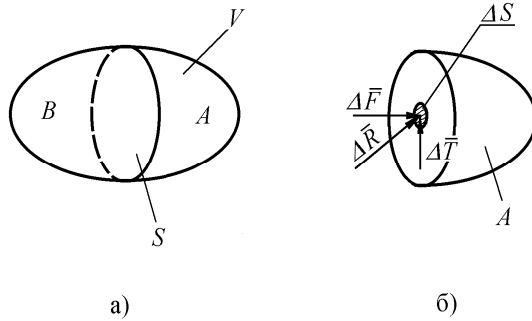


Рисунок 1.3 — Схема дії сил на рідину: а) фіксований об'єм рідини; б) заміна масових сил на поверхневі

б). Для того щоб частина A перебувала в стані рівноваги, необхідно по площі перерізу всі масові сили об'єму B збалансувати поверхневими.

Виділимо в перерізі S елементарну направлену площадку ΔS . На дану площадку під кутом α до нормалі \vec{n} діє елементарна зовнішня сила $\Delta \vec{R}$. Дану силу можна розкласти на дві складові: нормальну складову сили $\Delta \vec{F}$ і дотичну складову сили $\Delta \vec{T}$ (рис. 1.3, б). В гідромеханіці нормальна складова сили $\Delta \vec{F}$ називається силою тиску, а дотична складова сили $\Delta \vec{T}$ — силою тертя.

1.3 Тиск у рідині

Розглянемо відношення елементарної нормальної складової сили тиску $\Delta \vec{F}$ до площини ΔS , коли розміри останньої прямують до нуля

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}. \quad (1.4)$$

Величина \vec{p} є вектором нормального напруження, який напрямлений вздовж нормалі \vec{n} і протилежний за напрямом. Абсолютне значення вектора нормального напруження в гідромеханіці називається *гідростатичним тиском*

$$p = |\vec{p}| \text{ або } \vec{p} = -\vec{n}p, \quad (1.5)$$

тобто тиск в точці є скалярною величиною і в різних точках може мати різне значення. Очевидно, що для всього перерізу S середнє значення тиску можна визначити як його середньоінтегральне значення по площі перерізу S

$$p_{\text{сер}} = \frac{1}{S} \int p_i dS_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

де p_i — величина тиску на елементарній i -й площадці dS .

При рівномірному розподілі сили тиску по площі S середнє значення величини тиску знаходять із співвідношення

$$p_{\text{сер}} = \left| \frac{\vec{F}}{S} \right| \quad (1.7)$$

1.3.1 Основна властивість гідростатичного тиску

Основну властивість гідростатичного тиску трактують таким чином: *величина гідростатичного тиску у точці не залежить від орієнтації елементарної площадки, тобто однакова у всіх напрямках.*

Щоб довести дану властивість, в рідині, яка перебуває в стані спокою, виділимо елементарний об'єм в формі тетраедра, сторони якого паралельні осям координатної системи $Oxyz$ і рівні dx , dy , dz (рис. 1.4).

Розглянемо умову рівноваги виділеного тетраедра. На даний об'єм діє масова сила, одиничні масові сили якої відносно координатних осей дорівнюють X , Y і Z . З боку кожної грані, як показано на рис. 1.4, на виділений об'єм діє сила тиску, зумовлена дією тиску p_x , p_y , p_z , p_n .

Складемо умову рівноваги сил в проекції на вісь Ox

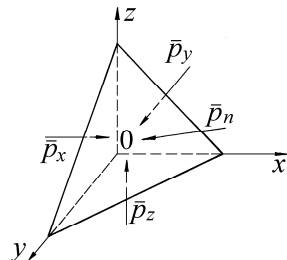


Рисунок 1.4 — До доведення основної властивості тиску

$$F_x - F_n \cos(n, x) - G_x = 0 \quad (1.8)$$

Візьмемо до уваги те, що проекції $F_x = p_x dS_x$, $F_n = p_n dS_n$, $G_x = \rho X dV$, тоді рівняння рівноваги тетраедра матиме вигляд

$$p_x dS_x - p_n dS_n \cos(\hat{n}, x) - \rho X dV = 0, \quad (1.9)$$

де dS_x — площа грані тетраедра перпендикулярної до осі Ox ;

dS_n — площа нахиленої грані тетраедра;

ρ — густина рідини;

dV — об'єм тетраедра.

Рівняння (1.9) розділимо на величину площі dS_x . Враховуючи те, що $dS_n \cos(\hat{n}, x) = dS_x$, а $dV = dS_x dx/3$, рівняння рівноваги тетраедра в проекції на вісь Ox можна записати

$$p_x - p_n - \frac{1}{3} \rho X dx = 0. \quad (1.10)$$

Коли спрямувати розміри граней тетраедра до нуля, доданок $\rho X dx/3$, який описує масові сили, теж прямуватиме до нуля. Тоді рівняння (1.10) запишеться у вигляді

$$p_x - p_n = 0 \quad \text{або} \quad p_x = p_n. \quad (1.11)$$

Аналогічним чином можна скласти рівняння рівноваги сил вздовж осей Oy і Oz , після чого отримаємо:

$$p_x - p_n = 0, \quad p_y - p_n = 0, \quad p_z - p_n = 0$$

або

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (1.12)$$

З рівняння (1.12) видно, що значення тиску на всіх гранях тетраедра однакове, а отже, величина тиску в точці, незалежно від орієнтації в просторі елементарної площадки, що містить дану точку.

1.3.2 Одиниці вимірювання тиску

В міжнародній системі одиниць (СІ) тиск вимірюють в *паскалях* (Па). За величину тиску в 1 Па приймають силу $F = 1$ Н, яка рівномірно діє на площу розміром 1 м^2 (1 Па = 1 Н/м^2). Допускається також вимірювати тиск в *барах* (1 бар = 10^5 Па).

На практиці для вимірювання тиску широко використовуються позасистемна одиниця — *технічна атмосфера* (ат). Це сила F величиною 1 кгс, яка рівномірно діє на площу $S = 1 \text{ см}^2$ ($1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2$). Якщо сила, яка рівномірно діє на площу 1 см^2 , виражена в динах ($1 \text{ дин} = 1 \text{ г·см/с}^2$), то одиницю тиску в такому випадку називають *барією*.

Крім технічної атмосфери застосовують *стандартну (фізичну) атмосферу* (атм), величина якої дорівнює стандартному атмосферному тискові ($1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт.ст.}$)

Зв'язок між розмірністю тиску в різних системах виміру має вигляд

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 9,81 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па} = 9,81 \cdot 10^5 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2},$$

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1,02 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ ат} = 10 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}.$$

Для вираження величини тиску використовують висоту стовпчика деякої рідини, наприклад, метри водяного стовпчика (м вод.ст.) або міліметри ртутного стовпчика (мм рт.ст.). Для перерахунку цих одиниць в СІ використовують або перевідний коефіцієнт (наприклад, $1 \text{ мм рт.ст.} = 133,322 \text{ Па}$), або формулу зв'язку між тиском і висотою стовпчика: $p = \rho gh$.

В деяких країнах Європи і США тиск вимірюють в одиницях psi (фунт/кв.дюйм)

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Па}.$$

Залежно від точки відліку розрізняють абсолютний, надлишковий або вакуумметричний тиск. Якщо відлік тиску вести від нульової відмітки (абсолютне значення тиску дорівнює нулю — повне розрідження) (рис. 1.5), то абсолютний тиск в точці A на рівні земної поверхні дорівнює атмосферному. Надлишковий і вакуумметричний тиски при цьому дорівнюють нулю.

Якщо тиск у фіксованій точці (наприклад в т. B) перевищує значення атмосферного, то його абсолютне значення дорівнює

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{ат}} + p_n, \quad (1.13)$$

де p_n — надлишковий тиск (надлишок тиску над атмосферним).

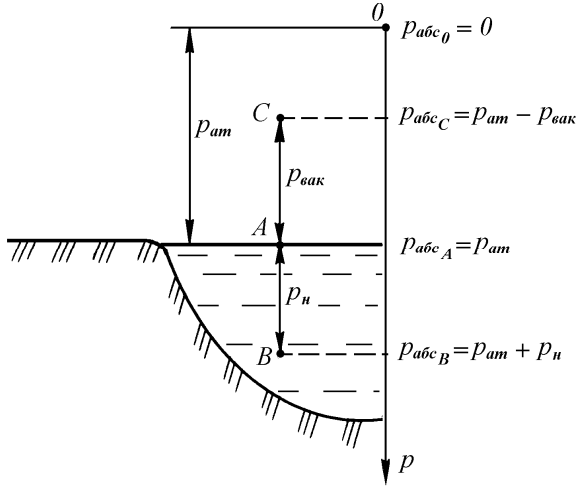


Рисунок 1.5 — Залежність тиску від точки відліку

У випадку, коли тиск у фіксованій точці (наприклад, в т. С) менший від атмосферного, то його абсолютне значення дорівнює

$$p_{абс} = p_{атм} - p_{вак}, \quad (1.14)$$

де $p_{вак}$ — вакуумметричний тиск або тиск, величини якого не вистачає до атмосферного.

У практиці, при визначенні певних величин (абсолютне значення тиску, об'єм рідини, густина і т.д.) використовують поняття «стандартні (технічні) умови» та «нормальні (фізичні) умови».

Стандартні умови — це умови, які визначаються тиском $p_{атм} = 1,033 \text{ ат} = 0,1013 \text{ МПа}$, що відповідає 760 мм рт.ст. і температурою $T = 293,15 \text{ К}$ ($20 \text{ }^\circ\text{C}$). За стандартних умов ведуться всі розрахунки в газовій промисловості.

Нормальні (фізичні) умови — це умови, що визначаються тиском $p_{атм} = 760 \text{ мм рт.ст} = 0,1013 \text{ МПа}$ і температурою $T = 273,15 \text{ К}$ ($0 \text{ }^\circ\text{C}$). За нормальних умов ведуться всі розрахунки в газовій динаміці та теплотехніці.

Границя відношення сили тертя ΔT до площі ΔS за умови, що розмір останньої прямує до нуля, називається вектором дотичного напруження

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta S}. \quad (1.15)$$

Розмірність дотичного напруження ідентична розмірності тиску (Па).

Приклад 1.1. Визначити висоту стовпчика води ($\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$), ртуті ($\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$) та спирту ($\rho_c = 860 \text{ кг/м}^3$), що зрівноважують тиск в $0,0981 \text{ МПа}$.

Розв'язок: Висота стовпчика води

$$h_w = \frac{p}{\rho_w g} = \frac{0,0981 \cdot 10^6}{1000 \cdot 9,81} = 10 \text{ м}.$$

Висота стовпчика ртуті

$$h_{рт} = \frac{p}{\rho_{рт} g} = \frac{0,0981 \cdot 10^6}{13600 \cdot 9,81} = 0,7355 \text{ м}.$$

Висота стовпчика спирту

$$h_c = \frac{p}{\rho_c g} = \frac{0,0981 \cdot 10^6}{860 \cdot 9,81} = 11,6 \text{ м}.$$

1.4 Фізичні властивості рідин

До основних параметрів, які характеризують стан рідини, відносять густину, питому вагу, стисливість, температурне розширення, в'язкість, тиск насичених парів.

Густина ρ — це маса рідини m в одиниці об'єму V . У випадку неоднорідності рідини вводять поняття густини ρ_i елементарного об'єму ΔV_i

$$\rho_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.16)$$

де Δm_i — маса елементарного об'єму ΔV_i .

Тоді середнє значення густини за об'ємом V дорівнює:

$$\rho_{\text{сер}} = \frac{1}{V} \int_V \rho_i dV_i \quad (1.17)$$

Для однорідної рідини середнє значення густини можна визначити із співвідношення

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.18)$$

Розмірність густини ρ в СІ: $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$; в системі СГС: $[\rho] = \text{г}/\text{см}^3$; в технічній системі МКГСС: $[\rho] = \text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

Питома вага γ — це вага рідини G в одиниці об'єму V . Якщо рідина однорідна, то

$$\gamma = \frac{G}{V}. \quad (1.19)$$

Розмірність питомої ваги в СІ: $[\gamma] = \text{Н}/\text{м}^3$; в системі СГС: $[\gamma] = \text{дин}/\text{см}^3$; в технічній системі МКГСС: $[\gamma] = \text{кгс}/\text{м}^3$.

Враховуючи, що $G = mg$, зв'язок між густиною і питомою вагою рідини має вигляд

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g. \quad (1.20)$$

В'язкість рідини — це здатність її частинок або окремих шарів чинити опір при їх взаємному переміщенні (течії). Згідно з формулою в'язкого тертя Ньютона напруження тертя τ , що виникає при взаємному переміщенні шарів рідини, рівне відношенню сили тертя в рідині T до площі поверхні тертя S і є прямо пропорційне градієнту швидкості du/dy (рис. 1.6)

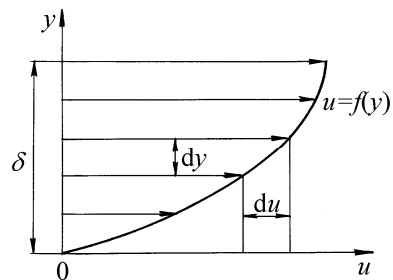


Рисунок 1.6 — Профіль швидкостей при течії в'язкої рідини вздовж стінки

$$\tau = \frac{T}{S} = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.21)$$

На рис. 1.6 dy — нескінченно мала віддаль між шарами рідини (при розв'язанні задач в теорії змащування приймається рівною зазорів між стінками δ); du — зміна швидкості.

Коефіцієнт пропорційності μ у формулі (1.21) називають *динамічним коефіцієнтом в'язкості* або просто — *динамічна в'язкість*.

Розмірність коефіцієнта динамічної в'язкості в СІ: $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$; в технічній системі МКГСС: $[\mu] = \text{кгс} \cdot \text{с}/\text{м}^2$; в системі СГС: $[\mu] = \text{дин} \cdot \text{с}/\text{см}^2 = \text{П}$ (Пуаз).

Крім поняття динамічної в'язкості, в гідромеханіці використовують *кінематичний коефіцієнт в'язкості* ν , який ще називають *кінематична в'язкість*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.22)$$

Розмірність коефіцієнта кінематичної в'язкості в СІ: $[\nu] = \text{м}^2/\text{с}$, в системі СГС: $[\nu] = \text{см}^2/\text{с} = \text{Ст}$ (Стокс).

В'язкість рідини нелінійно залежить від температури і тиску. Ці залежності можна описати такими експоненціальними співвідношеннями:

$$\nu = \nu_0 e^{-u(t-t_0)} \quad (1.23)$$

$$\mu = \mu_0 e^{\beta(p-p_0)}, \quad (1.24)$$

де ν_0 , μ_0 — відповідно в'язкість рідини при $t = t_0$ і $p = p_0$;

$e \approx 2,71828$ — основа натурального логарифма;

u і β — коефіцієнти, значення яких для мастил дорівнюють

$u = (0,02 \dots 0,03) 1/^\circ\text{C}$ і $\beta = (0,02 \dots 0,03) 1/\text{МПа}$.

У формулі (1.23), яка була запропонована П. А. Філоновим, ступені u називають показником віскограми. Величина u рівна тангенсу кута нахилу до осі абсцис (t) графіка лінійної залежності $\ln \nu = f(t)$ і може бути визначена за відомими значеннями в'язкості ν_1 і ν_0 для двох різних температур t_1 і t_0 як

$$u = \frac{\ln(\nu_1 / \nu_0)}{t_0 - t_1}. \quad (1.25)$$

Знайдене значення μ надалі можна використати для розрахунку в'язкості за формулою (1.23) для будь-якої іншої температури t з діапазону $t_1 \dots t_0$.

Стисливість — це властивість рідини змінювати свій об'єм залежно від тиску. Стисливість характеризується коефіцієнтом об'ємної стисливості β_p і показує, на скільки зміниться об'єм рідини при зміні тиску на одиницю.

Згідно з визначенням зміна об'єму V_0 сталої маси рідини при зміні тиску на величину $\Delta p = p - p_0$ дорівнює

$$V(p) - V_0 = -\Delta V = \beta_p V_0 \Delta p, \quad (1.26)$$

де $V(p)$ — об'єм, який займає рідина після підвищення тиску на величину Δp ;

ΔV — величина зміни об'єму, знак мінус перед якою свідчить про те, що з підвищенням тиску об'єм рідини зменшуватиметься.

Таким чином згідно з (1.26) коефіцієнт об'ємної стисливості β_p дорівнює

$$\beta_p = \frac{-\Delta V}{V_0 \Delta p}. \quad (1.27)$$

Розмірність коефіцієнта об'ємної стисливості обернена до розмірності тиску і в СІ $[\beta_p] = \text{Па}^{-1}$.

Величина, обернена до коефіцієнта об'ємної стисливості β_p , називається модуль об'ємної пружності рідини $K = 1/\beta_p$ (Па).

Запишемо (1.26) відносно об'єму $V(p)$

$$V(p) = V_0(1 - \beta_p \Delta p). \quad (1.28)$$

Розділимо рівність (1.28) на масу рідини m і, враховуючи (1.18), знайдемо залежність зміни густини рідини від зміни тиску

$$\rho(p) = \frac{\rho_0}{1 - \beta_p \Delta p}, \quad (1.29)$$

де ρ_0 — густина рідини масою m в об'ємі V_0 ;
 $\rho(p)$ — густина рідини масою m в об'ємі $V(p)$.

Температурне розширення. Під поняттям температурного розширення розуміють зміну об'єму заданої маси рідини за рахунок зміни температури. Даний процес характеризується коефіцієнтом температурного розширення рідини β_t .

Згідно з визначенням при підвищенні температури заданої маси рідини на величину ΔT зміна об'єму рівна:

$$\Delta V = V(t) - V_0 = V_0 \beta_t \Delta T. \quad (1.30)$$

Тоді вираз для визначення коефіцієнта температурного розширення матиме вигляд

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}. \quad (1.31)$$

Розмірність коефіцієнта температурного розширення обернена до розмірності температури і в СІ $[\beta_t] = \text{K}^{-1}$.

Виразимо (1.30) відносно величини $V(t)$

$$V(t) = V_0(1 + \beta_t \Delta T). \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) описує зміну об'єму заданої маси рідини при зміні її температури.

Для визначення залежності густини рідини від температури розділимо (1.32) на величину маси m . Тоді з врахуванням (1.18) маємо:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t \Delta T}, \quad (1.33)$$

де $\rho(t)$ — густина рідини при температурі t ;

ρ_0 — густина рідини при $t = t_0$.

Для мінеральних масел приймають $\beta_t = 7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Тиск насичених парів $p_{н.п.}$ — тиск, який необхідно створити в рідині, щоб мала місце рівновага рідкої і газової фаз при даній температурі. За таких умов при нагріванні рідини вона буде кипіти, а при охолодженні пара буде конденсуватися. Але ті ж процеси можна зініціювати змінюючи тиск: при зменшенні тиску нижче тиску насичених парів рідина закипить, а при підвищенні — кипіння припиняється.

Тиск насичених парів залежить від температури: чим вища температура рідини, тим він більший. Наприклад, для води за температури $t = 100^\circ \text{C}$ величина тиску насичених парів

$p_{н.п.} = p_{ат}$. Як відомо, за таких умов вода закипає, перетворюючись у пару. Зниженням тиску в рідині нижче $p_{н.п.}$, наприклад, під час роботи насосів, пояснюється виникнення явища кавітації — холодного кипіння рідини з утворенням великої кількості бульбашок пари, які при попаданні в зону підвищеного тиску швидко захоплюються утворюючи при цьому ударні хвилі.

Деякі фізичні властивості найбільш розповсюджених в техніці рідин наведено в додатках Е, Ж.

Приклад 1.2. Нафта, питома вага якої $\gamma = 9000 \text{ Н/м}^3$, має за температури $t = 50^\circ\text{C}$ динамічну в'язкість $\mu = 5,884 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. Визначити її кінематичну в'язкість ν .

Розв'язок: Зв'язок між кінематичною і динамічною в'язкістю визначається за формулою (1.22). Враховуючи зв'язок між густиною і питомою вагою згідно з формулою (1.20), отримаємо

$$\nu = \frac{\mu g}{\gamma}.$$

Тоді,

$$\nu = \frac{5,884 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{9000} = 6,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Приклад 1.3. В автоклав об'ємом $V = 50 \text{ л}$ під деяким тиском закачано 50,5 л ефіру. Визначити, нехтуючи деформацією стінок автоклава, підвищення тиску в ньому Δp , якщо коефіцієнт об'ємної стисливості ефіру за $t = 20^\circ\text{C}$ має значення $\beta_p = 1,95 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$.

Розв'язок: Згідно з формулою (1.27) для коефіцієнта об'ємної стисливості підвищення тиску в автоклаві можна визначити як

$$\Delta p = -\frac{\Delta V}{\beta_p V_0},$$

де $\Delta V = (V - V_0)$.

Тоді

$$\Delta p = -\frac{(50 - 50,5) \cdot 10^{-3}}{1,95 \cdot 10^{-9} \cdot 50,5 \cdot 10^{-3}} = 50,8 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Приклад 1.4. У вертикальному циліндричному резервуарі діаметром $d = 4 \text{ м}$ зберігається 100 т нафти, густина якої $\rho = 850 \text{ кг/м}^3$ за $t = 0^\circ\text{C}$. Визначити коливання рівня в резервуарі при зміні температури нафти від 0 до 30°C . Розширення резервуара не враховувати. Коефіцієнт температурного розширення нафти брати рівним $0,00072 \text{ К}^{-1}$.

Розв'язок: Об'єм, який займає нафта в резервуарі за температури 0 °С

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{100 \cdot 10^3}{850} = 117,8 \text{ м}^3.$$

Зміна об'єму при зміні температури на 30 °С

$$\Delta V = \beta_t \cdot V \cdot \Delta t = 0,00072 \cdot 117,8 \cdot 30 = 2,54 \text{ м}^3.$$

Розмах коливань рівня нафти в циліндричному резервуарі з площею дна $S = \pi d^2/4$:

$$h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{4 \cdot \Delta V}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2,54}{3,14 \cdot 4^2} = 0,202 \text{ м}.$$

1.5 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) В чому полягає фізичний зміст основного рівняння гідростатики?
- 2) Як сили в гідродинаміці відносять до зовнішніх, масових та поверхневих сил?
- 3) Що називається гідростатичним тиском?
- 4) В чому полягає основна властивість гідростатичного тиску?
- 5) Яка несистемна одиниця використовується для виміру тиску?
- 6) Як пов'язані між собою абсолютний і надлишковий тиск в даній точці?
- 7) Які параметри тиску та температури характеризують “нормальні (фізичні) умови” та “стандартні умови”?
- 8) Який взаємозв'язок між густиною і питомою вагою рідини?
- 9) Як зміниться густина рідини при збільшенні тиску чи підвищенні температури?
- 10) Який зв'язок між коефіцієнтом об'ємного стиску і об'ємним модулем пружності?
- 11) Який зміст коефіцієнта температурного розширення?
- 12) Що називається в'язкістю рідини?
- 13) Сформулюйте закон в'язкого тертя Ньютона.
- 14) Який зв'язок між динамічним і кінематичним коефіцієнтом в'язкості?
- 15) Як залежить в'язкість рідини від температури?
- 16) Що називають тиском насиченої пари рідини? Від чого він залежить?
- 17) Дайте класифікацію ньютонівських рідин.

Контрольні тестові завдання

1. Одна фізична атмосфера відповідає:
 - а) 735 мм рт. ст.; б) 760 мм рт. ст.; в) 10 м вод. ст.
2. Що буде з густиною рідини, якщо її підігріти?
 - а) збільшиться; б) зменшиться; в) залишиться без змін.

3. Що буде з густиною рідини при збільшенні тиску?
а) збільшиться; б) зменшиться; в) залишиться без змін.
4. Що називається абсолютним тиском (в загальному випадку)?
а) сума надлишкового тиску в даній точці і атмосферного;
б) сума вагового тиску і атмосферного;
в) різниця надлишкового тиску і атмосферного.
5. Кінематична в'язкість одного нафтопродукту за температури 20 °С рівна 1,2 Ст, динамічна в'язкість другого, що має густину 0,9 кг/л за тієї ж температури рівна 80 сП. Який з них більш в'язкий?
а) перший; б) другий; в) в'язкість однакова.
6. Скільки необхідно резервуарів ємністю 1000 м³ для зберігання 3 млн. тонн нафти, густина якої в умовах зберігання рівна 0,88 г/см³?
а) 342; б) 3409; в) 34200.
7. У вертикальному циліндричному резервуарі діаметром 8 м міститься 200 т нафти, густина якої рівна 88 кгс·с²/м⁴. Визначити висоту рівня.
а) 4,6 м; б) 8,2 м; в) 0,42 м.
8. Визначити надлишковий тиск на дно резервуара, заповненого рідиною на висоту 8 м. Густина рідини 0,99 г/см³. Абсолютний тиск на поверхні рідини 1,1 кгс/см². Атмосферний тиск 1 кгс/см².
а) 88 кПа; б) 110 кПа; в) 10 кПа.
9. На якій глибині абсолютний тиск в рідині з густиною 900 кг/м³ буде рівний 1 кгс/см² при вакуумі над вільною поверхнею 0,4 кгс/см²? Атмосферний тиск дорівнює 1 кгс/см².
а) 2,39 м; б) 12,42 м; в) 4,44 м.
10. Манометр, встановлений на висоті 1 м від дна резервуара, показує тиск 0,7 кгс/см². Яка висота рідини в резервуарі, якщо її питома вага 880 кгс/м³?
а) 12,42 м; б) 8,95 м; в) 15,34 м.

2 ГІДРОСТАТИКА

Гідростатика — це розділ гідромеханіки, в якому вивчаються закони рівноваги рідини в стані абсолютного або відносного спокою.

Під абсолютним спокоєм розуміють стан рідини, при якому поверхневі сили врівноважуються силою ваги, а під відносним — коли поверхневі сили, крім сили ваги, врівноважуються силами інерції. У стані відносного спокою рідина є нерухомою відносно стінок посудини, але сама посудина здійснює рух з постійним прискоренням, внаслідок якого і виникають сили інерції.

2.1 Диференціальне рівняння рівноваги рідини

Диференціальне рівняння рівноваги рідини було отримано Л. Ейлером у 1755 р. Воно встановлює зв'язок поверхневих і масових сил в рідині, яка перебуває в стані абсолютного або відносного спокою. Для виведення рівняння виділимо в нерухомому об'ємі рідини прямокутний паралелепіпед, сторони якого dx , dy , dz є паралельні координатним осям (рис. 2.1). В

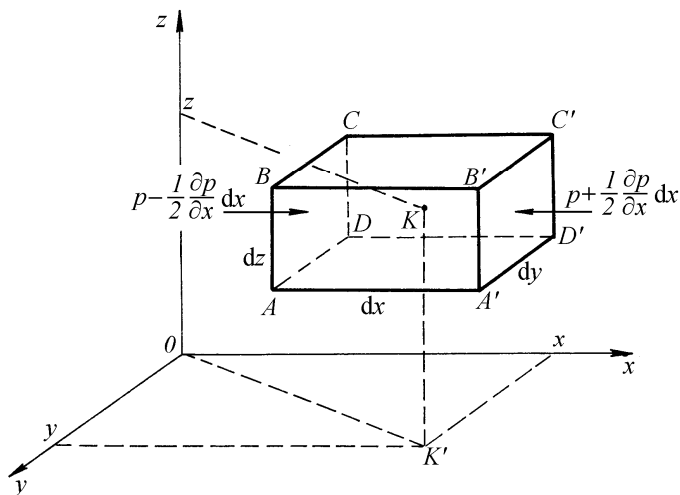


Рисунок 2.1 — Схема для виведення рівняння рівноваги рідини

центрі даного паралелепіпеда розмістимо точку K з координатами x, y, z , тиск в якій дорівнює p . Площі граней паралелепіпеда будуть рівними $dS_1 = dx dy$, $dS_2 = dx dz$, $dS_3 = dy dz$. Значення тиску на гранях паралелепіпеда можна визначити як:

$$\begin{aligned} p_{ABCD} &= p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx, & p_{A'B'C'D'} &= p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx, \\ p_{ABB'A'} &= p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, & p_{DCC'D'} &= p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, \\ p_{ADD'A'} &= p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz, & p_{BCC'B'} &= p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ — відповідно градієнт зміни тиску за напрямками $0x$, $0y$, $0z$.

Введемо поняття одиничної масової сили, яка дорівнює відношенню масової сили, що діє на виділений об'єм, до маси даного об'єму: $g = G / m$. Позначимо через X, Y, Z проекції масових сил на відповідні осі координат $0x, 0y, 0z$

$$X = \frac{G_x}{m}; \quad Y = \frac{G_y}{m}; \quad Z = \frac{G_z}{m}. \quad (2.2)$$

З курсу теоретичної механіки відомо, що матеріальне тіло перебуває в стані рівноваги (спокою) у випадку, коли сума проекцій на відповідні осі $0x, 0y, 0z$ і сума моментів відносно будь-якої точки всіх сил, які діють на даний об'єм, дорівнює нулю (принцип д'Аламбера). Скористаємось даним принципом і запишемо умову рівноваги сил для виділеного паралелепіпеда в проекціях на осі координат враховуючи сили тиску, які діють на його гранях, і загальну масову силу:

$$\begin{cases} \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx \right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx \right) dydz + \rho X dx dy dz = 0, \\ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy \right) dx dz + \rho Y dx dy dz = 0, \\ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz \right) dy dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz \right) dy dx + \rho Z dx dy dz = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Розкриємо дужки і поділимо всі члени рівняння системи (2.3) на масу рідини у виділеному об'ємі $dm = \rho \, dx \, dy \, dz$. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь рівноваги рідини в проекціях на осі координат, запропоновану Л. Ейлером

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Помножимо відповідно перше рівняння системи (2.4) на dx , друге — на dy , третє — на dz і просумуємо їх

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (2.5)$$

Права частина рівняння (2.5) є не що інше, як повний диференціал тиску dp . Тоді

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp. \quad (2.6)$$

Диференціальне рівняння рівноваги (2.6) є базовим для розв'язку багатьох задач і описує основні закони гідростатики рідини в стані абсолютного і відносного спокою в декартовій системі координат $Oxyz$. В циліндричній системі координат для процесів, симетричних відносно осі Oz , дане рівняння набуде вигляду

$$\rho(Rdr + Zdz) = dp, \quad (2.6, a)$$

де R — проекція одиничної масова сила на вісь Or ;

$dr = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ — приріст координати r .

Далі наведені окремі випадки інтегрування диференціального рівняння рівноваги рідини з метою отримання практичних формул для розв'язку задач гідростатики.

2.2 Інтегрування диференціального рівняння рівноваги рідини

2.2.1 Основне рівняння гідростатики

За допомогою диференціального рівняння рівноваги дослідимо закон зміни тиску в нерухомій рідині. Для цього в посудині з однорідною рідиною, густина якої ρ , на висоті z від площини порівняння $0-0$ виділимо точку A (рис. 2.2). Площина порівняння — це довільно взята горизонтальна площина, від якої ведеться відлік геометричних (нівелірних) висот положення вибраної точки в об'ємі рідини.

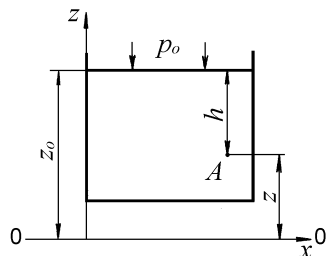


Рисунок 2.2 — До виведення основного рівняння гідростатики

Допустимо, що на заданій поверхні, розміщеній на висоті z_0 від площини порівняння, значення тиску відоме і дорівнює p_0 . У стані абсолютного спокою, коли на рідину з масових сил діє тільки сила тяжіння, проекції одиничної масової сили, що діє на точку A , будуть визначатися як $X = Y = 0$, $Z = -g$. Диференціальне рівняння рівноваги (2.6) при цьому набуде вигляду

$$-\rho g dz = dp. \quad (2.7)$$

Розв'язок рівняння (2.7) знаходимо в межах таких крайових умов:

$$\begin{aligned} \text{при } z = z_0; \quad p = p_0, \\ \text{при } z = z; \quad p = p. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тоді розв'язок рівняння (2.7) матиме вигляд

$$p - p_0 = \rho g(z_0 - z). \quad (2.9)$$

Розділимо праву і ліву частини (2.9) на ρg і згрупуємо члени з однаковими індексами

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = z + \frac{p}{\rho g}. \quad (2.10)$$

В даному рівнянні доданок z називається геометричний напір, доданок $p/\rho g$ — п'єзометричний напір, а їх сума $H = z + p/\rho g$ — гідростатичний напір. З фізичної точки зору напір H є не що інше, як питома енергія рідини, віднесена до одиниці ваги.

Рівняння (2.10) описує основний закон гідростатики: *гідростатичний напір (питома енергія) для будь-якої точки однорідної рідини є величина стала.*

Позначимо різницю висот ($z_0 - z$), яка показує глибину занурення точки A , через h (див. рис. 2.2) й підставимо в рівняння (2.9)

$$p = p_0 + \rho gh . \quad (2.11)$$

Рівняння (2.11) називають основним рівнянням гідростатики. Воно дозволяє визначити тиск у довільній точці однорідної рідини, який залежить від зовнішнього тиску p_0 , глибини занурення точки h та від густини рідини.

Крім поняття площини порівняння, в гідромеханіці використовується поняття поверхні рівня, вільної поверхні та п'єзометричної поверхні.

Поверхня рівня — це поверхня, на якій тиск у будь-якій точці є однаковим. Таку поверхню ще називають ізобаричною поверхнею.

Вільна поверхня — площина контакту двох фаз (рідкої і газоподібної).

П'єзометрична поверхня — поверхня, на якій абсолютний тиск в кожній точці дорівнює атмосферному. П'єзометрична поверхня є однією з ізобаричних поверхонь і для відкритої посудини буде співпадати з вільною поверхнею.

Знайдемо форму даних площин при абсолютному спокої рідини. Оскільки повний диференціал тиску dp на поверхні рівня дорівнює нулю, то згідно з (2.7) маємо:

$$\rho g dz = 0$$

або
$$dz = 0 ; z = idem . \quad (2.12)$$

Як видно з (2.12), для однорідної рідини, яка перебуває в стані абсолютного спокою, поверхня рівня, вільна поверхня та п'єзометрична поверхня мають форму горизонтальної площини.

Приклад 2.1. Визначити величину та напрям сили F , що прикладена до штока поршня для утримання його на місці. Праворуч від поршня є повітря, ліворуч від поршня та в резервуарі, куди опущений відкритий кінець труби, — спирт. Покази пружинного манометра $p_m = 0,2 \text{ кгс/см}^2$; $H = 8 \text{ м}$; $D = 200 \text{ мм}$; $d = 100 \text{ мм}$, густина спирту $\rho = 789,3 \text{ кг/м}^3$.

Розв'язок: При розв'язуванні задач, в яких є поршни або система поршнів, необхідно записувати рівняння рівноваги всіх сил, що діють на цю систему.

Визначимо вакуум у лівій частині циліндра

$$p_a = \rho g H = 789,3 \cdot 9,81 \cdot 8 = 61944 \text{ Па} .$$

Сила, що діє на поршень з лівої сторони, напрямлена справа наліво і за величиною рівна

$$F_a = p_a S_a = p_a \frac{\pi D^2}{4} = 61944 \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 1945 \text{ Н} .$$

Сила, яка діє на поршень з правої сторони, напрямлена справа наліво і за величиною рівна

$$F_n = p_m S_n = p_m \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) ,$$

$$F_n = 0,2 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14}{4} (0,2^2 - 0,1^2) = 462 \text{ Н} .$$

Для утримання поршня на місці сила F повинна бути напрямлена зліва направо і за величиною рівна

$$F = F_a + F_n = 462 + 1945 = 2407 \text{ Н} .$$

Приклад 2.2. В закритому резервуарі з нафтою, густина якої $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, вакуумметр, встановлений на його кришці, показує $p_e = 1,18 \cdot 10^4 \text{ Па}$ (рис. 2.4). Визначити покази манометра p_m , приєднаного до резервуара на глибині $H = 6 \text{ м}$ від поверхні рідини, та положення п'єзометричної площини.

Розв'язок: Проведемо площину 1-1 на рівні приєднання манометра. В цій площині абсолютний тиск відповідно до основного рівняння гідростатики рівний

$$p_{1-1} = p_0 + \rho g H ,$$

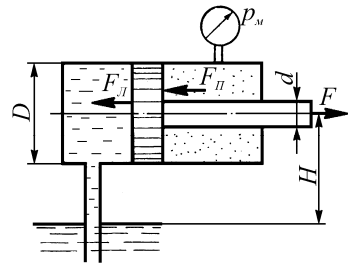


Рисунок 2.3 — До прикладу 2.1

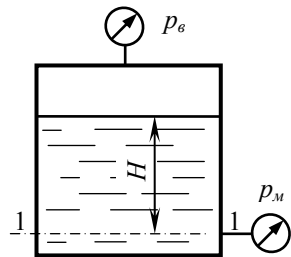


Рисунок 2.4 — До прикладу 2.2

де p_0 — абсолютний тиск на поверхні, рівний $p_{атм} - p_e$.

Тоді

$$p_{1-1} = p_{атм} - p_e + \rho g H.$$

З іншого боку, оскільки манометр вимірює надлишковий тиск ($p_m = p_n$), то

$$p_{1-1} = p_{атм} + p_m.$$

Прирівнюючи два вирази для p_{1-1} , знайдемо p_m :

$$p_m = -p_e + \rho g H = -1,18 \cdot 10^4 + 880 \cdot 9,81 \cdot 6 = 39997 \text{ Па}.$$

Оскільки на поверхні рідини тиск менший від атмосферного, то п'езометрична висота від'ємна:

$$h = -\frac{p_e}{\rho g} = \frac{1,18 \cdot 10^4}{880 \cdot 9,81} = -1,37 \text{ м},$$

і п'езометрична площина розташована нижче поверхні рідини на відстані 1,37 м.

2.2.2 Відносний спокій рідини при обертанні посудини навколо вертикальної осі

Візьмемо циліндр високою H і діаметром $d = 2R$, наповнимо рідиною на висоту H_n і розмістимо його в циліндричній системі координат $r\theta z$ (рис. 2.5).

Дослідимо закон зміни тиску і визначимо форму вільної поверхні рідини при обертанні даної посудини навколо її вертикальної осі z з постійною кутовою швидкістю $\omega = 2\pi n$ (n — кількість обертів посудини в секунду). Для цього в рідині виділимо точку A з координатами r_a і h_a . На дану точку рідини, крім сили ваги $G = mg$, буде діяти сила інерції $F_{in} = -ma$, де a — доцентрове прискорення точки A . Одиничні масові сили в даному випадку, які діють на т. A , дорівнюють:

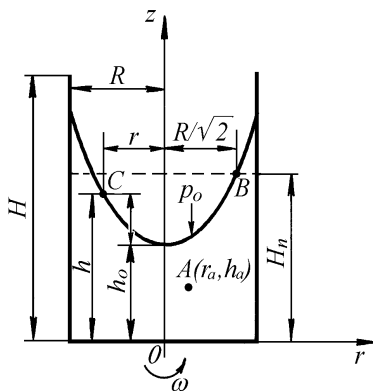


Рисунок 2.5 — Обертання відкритої посудини навколо вертикальної осі

$$R = \omega^2 r, \quad Z = -g.$$

Тоді диференціальне рівняння рівноваги рідини (2.6, а) набуде вигляду

$$dp = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz. \quad (2.13)$$

Розв'язок рівняння (2.13) знаходимо в межах таких крайових умов:

$$\text{при } r = r_a; z = h_a; p = p, \quad (2.14)$$

$$\text{при } r = 0; z = h_0; p = p_0,$$

де h_0 — відстань від дна посудини до вершини параболоїда обертання;

p_0 — значення тиску на вільній поверхні рідини.

Після інтегрування маємо

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r_a^2}{2} - \rho g(h_a - h_0). \quad (2.16)$$

Рівняння (2.16) описує закон зміни тиску в будь-якій точці рідини при обертанні посудини навколо своєї осі z з постійною кутовою швидкістю ω .

Встановимо форму вільної поверхні рідини при обертанні посудини навколо вертикальної осі. Для цього на вільній поверхні виділимо т. C з координатами r, h . Згідно з визначенням вільної поверхні $dp = 0$. Тоді рівняння (2.13) матиме вигляд

$$\omega^2 r dr = g dz \quad (2.17)$$

Розв'язок рівняння (2.17) в межах вільної поверхні буде

$$h - h_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (2.18)$$

З рівняння (2.18) видно, що вільна поверхня має форму параболоїда обертання. Позначимо через $z = h - h_0$ висоту параболоїда радіусом r . Тоді (2.18) має вигляд

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (2.19)$$

При розв'язанні задач на відносний спокій рідини при обертанні відкритого циліндра (чи посудини іншої форми, напри-

клад, зрізаного конуса) навколо вертикальної осі можуть бути три випадки:

- 1) Вершина параболоїда обертання не доторкається до дна посудини (рис. 2.6, а). Об'єм рідини, що є в посудині, при цьому дорівнює

$$V_p = \frac{\pi R^2 z}{2} + \pi R^2 h_0. \quad (2.20)$$

- 2) Вершина параболоїда доторкнулася до дна посудини (рис. 2.6, б)

$$V_p = \frac{\pi R^2 z}{2}. \quad (2.21)$$

- 3) Вершина параболоїда перетнула дно посудини (рис. 2.6, в)

$$V_p = \frac{\pi g H^2}{\omega^2} = \frac{\pi(R^2 - R_1^2)H}{2}. \quad (2.22)$$

Для розв'язку диференціального рівняння (2.13) М. Мердуг запропонував краєві умови типу:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_a; z = h_a; p = p, \\ \text{при } r = R\sqrt{2}; z = H_n; p = p_0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тоді розв'язок рівняння (2.13) за умови (2.23) має такий вигляд

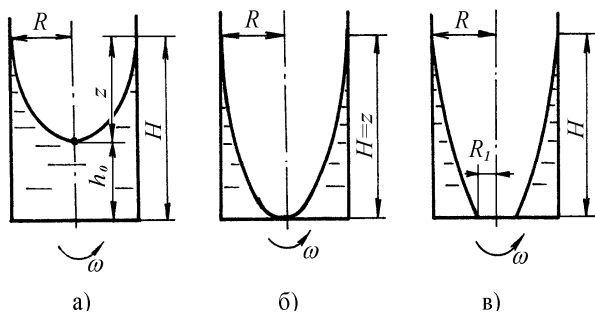


Рисунок 2.6 — Окремі випадки обертання відкритої посудини навколо вертикальної осі: а) $h_0 > 0$; б) $h_0 = 0$; в) $h_0 < 0$

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2(2r_a^2 - R^2)}{4} - \rho g(h_a - H_n). \quad (2.24)$$

На основі рівняння (2.24) можна легко пояснити принцип роботи рідинного тахометра. Тахометр являє собою герметично закриту циліндричну посудину, яка повністю заповнена рідиною (рис. 2.7).

На кришці посудини є два отвори (центральний і периферичний), які з'єднані між собою U-подібною трубкою. При обертанні даного циліндра навколо своєї осі між даними точками створюється перепад тиску, який фіксується перепадом висот рідини h в U-подібній трубці.

З рівняння (2.24) видно, що перепад висоти h залежить від кутової швидкості циліндричної посудини, що аналогічно зміні швидкості руху. Слід також зауважити те, що у випадку з'єднання двох отворів, які знаходяться по одну із сторін радіуса $r = R/\sqrt{2}$, тахометр внаслідок того, що рідина практично не стискається, працювати не буде.

На основі принципу відносного спокою рідини при обертанні посудини навколо вертикальної осі досягається рівномірний розподіл маси речовин (гуми, чавуну, пластмас і т.д.) в об'ємі пресформи.

Приклад 2.3. Вертикальна циліндрична посудина діаметром $D = 40$ см і висотою $H = 100$ см заповнена до половини водою (рис. 2.8). Визначити, з яким граничним числом обертів можна обертати цю посудину навколо її геометричної вертикальної осі, щоб з неї не виливалась вода, а також визначити силу тиску на дно посудини.

Розв'язок: Із рисунка 2.8 видно, що $H = z_0 + h$. Відповідно до формул (2.18) та (2.19)

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \quad h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

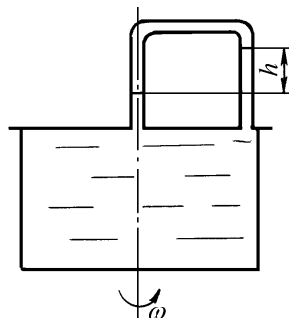


Рисунок 2.7 — Принцип роботи рідинного тахометра

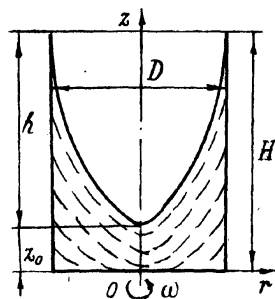


Рисунок 2.8 — Визначення граничного числа обертів посудини (до прикладу 2.3)

Тоді
$$H = z_0 + h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

З іншого боку, початковий рівень в резервуарі h_0 за умовою рівний $H/2$ і, отже,

$$H = \frac{H}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

звідки
$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{R} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1}}{0,2} = 22,1 \text{ с}^{-1}.$$

Граничне число обертів за хвилину

$$n = 30 \frac{\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 22,1}{3,14} = 211 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Для визначення сили тиску рідини на дно посудини знайдемо за формулою (2.16) закон розподілу надлишкового тиску, приймаючи, що $p = p_{атм}$. Тоді

$$p_n = p - p_{атм} = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g(z_0 - z),$$

Невідому величину вершини параболоїда z_0 визначимо за формулами

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{H}{2} - \frac{H}{2} = 0,$$

тобто параболоїд вільної поверхні торкається дна посудини, і закон розподілу надлишкового тиску

$$p_n = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \rho g z.$$

Для точок на дні посудини ($z = 0$) надлишковий тиск

$$p_n = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Силу тиску на дно посудини знайдемо як суму елементарних сил тиску, що діють на елементарні кільцеві площадки, рівні $2\pi r dr$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R p_n 2\pi r dr = \pi \rho \omega^2 \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 R^4 = \\ &= \frac{3,14}{4} \cdot 10^3 \cdot 22,1^2 \cdot 0,2^4 = 614 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Приклад 2.4. Відкрита посудина діаметром $d = 450$ мм, наповнена водою, обертається навколо вертикальної осі зі сталим числом обертів $n = 750$ об/хв (рис. 2.9). Визначити надлишковий тиск в точці А, що є на стінці на відстані $z = 200$ мм від дна посудини, якщо рівень води на осі перебуває на висоті $z_0 = 500$ мм від дна.

Розв'язок: В заданій точці надлишковий тиск буде рівний

$$p_{\text{над}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}} = \rho g(z_0 - z) + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2},$$

де ω — кутова швидкість обертання, яка дорівнює

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 750}{30} = 78,5 \text{ с}^{-1},$$

$$i \quad p_{\text{над}} = 1000 \cdot 9,81(0,5 - 0,2) + \frac{1000 \cdot 78,5^2 \cdot 0,225^2}{2} = 18610 \text{ Па.}$$

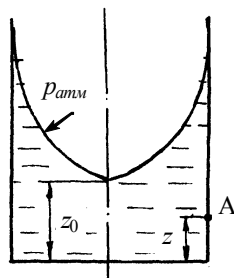


Рисунок 2.9 — Визначення тиску в посудині, яка обертається (до прикладу 2.4)

2.2.3 Відносний спокій рідини в посудині, що рухається прямолінійно з прискоренням

Типові приклади руху з прискоренням чи гальмуванням — це початок руху або зупинка залізничних цистерн, бензоводопродуктовозів та ін.

Розглянемо посудину прямокутної форми довжиною L , шириною B і висотою H (рис. 2.10), заповнену рідиною на глибину h_n . Тиск на вільній поверхні рідини постійний і дорівнює p_0 . Розглянемо довільну точку A з координатами x і h .

Внаслідок рівноприскореного руху посудини з рідиною на рідину в точці A діють:

- 1) сила ваги, зумовлена прискоренням вільного падіння;
- 2) сила інерції F_i , зумовлена прискоренням a і направлена в протилежну сторону.

Визначимо значення проекцій одиничних сил в на відповідні координатні осі

$$X = -a; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Тоді диференціальне рівняння рівноваги (2.6) буде

$$\rho(-a dx - g dz) = dp. \quad (2.25)$$

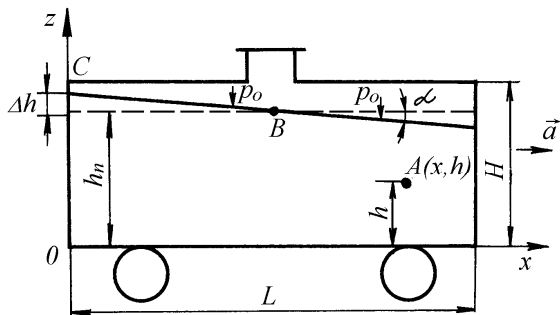


Рисунок 2.10 — Прямолінійний прискорений рух посудини з рідиною

Розв'яжемо рівняння (2.25) в межах таких крайових умов:

$$\begin{aligned} \text{при } z = h_n; x = L/2; p = p_0, \\ \text{при } z = h; x = x; p = p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Розв'язок рівняння (2.25) в межах (2.26) буде представлено у вигляді

$$p = p_0 + \rho g(h_n - h) + \rho a \left(\frac{L}{2} - x \right). \quad (2.27)$$

Тепер визначимо форму вільної поверхні рідини. Для цього в рівнянні (2.25) згідно з означенням приймаємо умову $dp = 0$. Тоді

$$dz = -\frac{a}{g} dx. \quad (2.28)$$

Для визначення форми вільної поверхні виділимо т. С з координатами $x = 0$ і $z = h_n + \Delta h$, випишемо краєві умови

$$\begin{aligned} \text{при } z = h_n; x = L/2, \\ \text{при } z = h_n + \Delta h; x = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Після інтегрування (2.28) в границях (2.29) знайдемо вираз, який описує форму вільної поверхні при рівноприскореному русі посудини з рідиною

$$h = h_n - \frac{a}{g} \left(x - \frac{L}{2} \right). \quad (2.30)$$

Як видно з рівняння (2.30), форма вільної поверхні рідини при рівноприскореному русі являє собою площину, нахилену до горизонту проти руху під кутом α , причому

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{g}. \quad (2.31)$$

При гальмуванні цистерни нахил вільної поверхні буде зворотним.

Приклад 2.5. Цистерна з нафтою рухається по горизонтальному шляху з швидкістю $v_0 = 60$ км/год (рис. 2.11). Розміри цистерни: $d = 3$ м, $l = 8$ м, $h = 0,3$ м. Густина нафти $\rho = 850$ кг/м³. В деякий момент часу поїзд починає гальмувати і, пройшовши шлях довжиною $L = 100$ м, зупиняється. Вважаючи рух прямолінійним рівномірно-сповільненим, визначити силу тиску нафти на передню стінку цистерни при русі і в стані спокою.

Розв'язок: При рівномірно-сповільненому русі прискорення

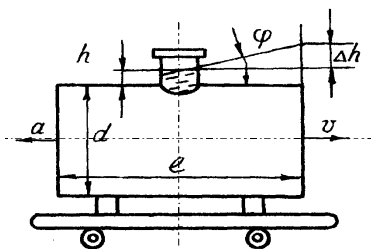


Рисунок 2.11 — Визначення сили тиску рідини на стінку цистерни при гальмуванні (до прикладу 2.5)

$$a = -\frac{v_0^2}{2L} = -\left(\frac{60 \cdot 10^3}{3600} \right)^2 \frac{1}{2 \cdot 100} = -1,39 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Прискорення цистерни направлене вліво, а напруження сили інерції переносного руху — вправо. Використавши формулу (2.31), визначимо кут φ нахилу вільної поверхні рідини до горизонту.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{g} = \frac{1,39}{9,81} = 0,142, \quad \angle \varphi = 8,07^\circ.$$

Визначимо висоту, на якій встановиться біля передньої стінки продовження площини вільної поверхні рідини

$$\Delta h = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{2} \cdot 0,142 = 0,568 \text{ м.}$$

Сила тиску рідини на передню стінку цистерни

$$F = \rho g h_c S,$$

де h_c — глибина занурення центра тяжіння стінки під рівень вільної поверхні; S — площа стінки.

Оскільки $h_c = \Delta h + h + \frac{d}{2}$, то

$$F = \rho g \left(\Delta h + h + \frac{d}{2} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 850 \cdot 9,81 (0,568 + 0,3 + 1,5) \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 140 \text{ кН.}$$

У стані спокою, або рівномірно прямолінійного руху ($\vec{a} = 0$), вільна поверхня рідини горизонтальна і сила, яка діє на торцеву стінку, рівна

$$F = \rho g \left(h + \frac{d}{2} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 850 \cdot 9,81 (0,3 + 1,5) \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 106 \text{ кН.}$$

2.3 Епюри гідростатичного тиску

Зміну тиску за глибиною рідини, яка описана рівнянням (2.11), можна представити графічно. Для цього розглянемо такий випадок. Нехай лінія AB — слід вертикальної стінки, яка обмежує рідину (рис. 2.12, а). На вільній поверхні діє тиск p_0 .

Для різних значень глибини h за рівнянням (2.11) обчислимо значення тиску і відкладемо його у відповідному масштабі в вигляді відрізків перпендикулярно до площини AB . З'єднаємо всі точки кінців відрізків тиску і побачимо, що залежність тиску від глибини описується прямою нахилоною лінією. Геометрична фігура $ABCD$ називається епюрою тиску. У випадку, коли площина AB перебуває під кутом α до гори-

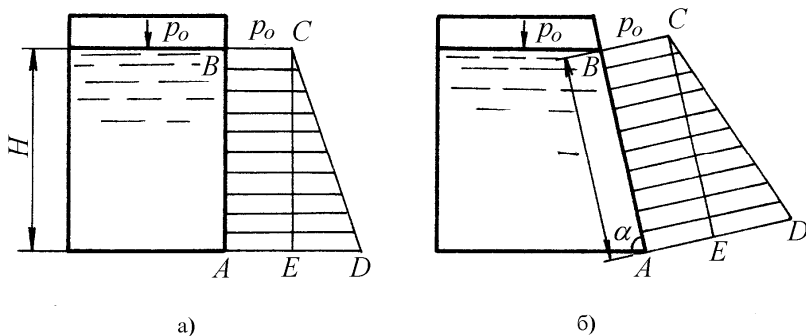


Рисунок 2.12 — Епюри гідростатичного тиску на вертикальну (а) та похилу (б) стінку посудини

зонту (рис. 2.12, б), рівняння (2.11) для визначення тиску в будь-якій точці площини AB можна записати

$$p = p_0 + \rho g l \sin \alpha, \quad (2.32)$$

де l — відстань від точки A до будь-якої точки площини.

Епюра тиску при цьому має вигляд, показаний на рис. 2.12, б.

Як видно з рис. 2.12, а, для побудови епюри тиску достатньо визначити тиск в двох крайніх точках, розміщених на будь-якій віддалі одна від одної. В масштабі, перпендикулярно до площини, відкласти значення тиску і з'єднати ці точки прямою лінією. На показаних рисунках фігура $ABCE$ відповідає епюрі від дії тиску на поверхні рідини, а фігура ECD — від дії тиску стовпа рідини.

На рис. 2.13 показані епюри надлишкового тиску на вертикальну стінку у випадку, коли на поверхні рідини $p_0 = p_{ат}$ (а), $p_0 = p_M$ (б), а також при $p_0 = p_{вак}$ (в).

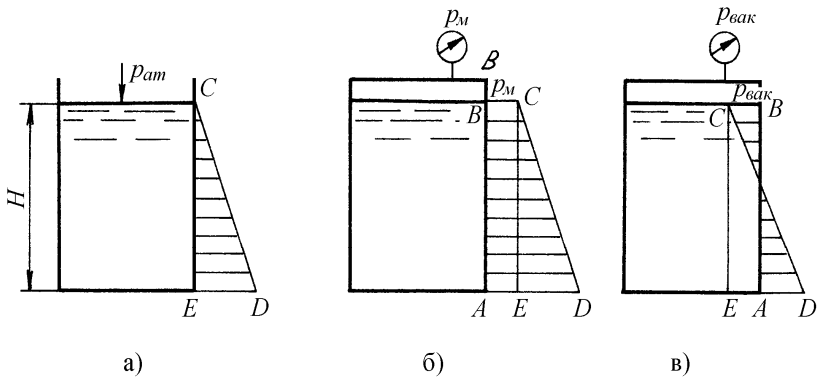


Рисунок 2.13 — Епюри тиску на вертикальну стінку посудини за наявності атмосферного (а), надлишкового (б) та вакууметричного (в) тиску, який діє на вільну поверхню рідини

2.4 Прилади для вимірювання тиску

У практиці вимірювання тиску використовують прилади, які фіксують абсолютне або надлишкове його значення.

Атмосферний тиск (абсолютний) вимірюють барометром (від гр. *baros* — вага і *metros* — міра). Однією із його різновидностей є барометр-анероїд, основним робочим елементом

якого є гофрована герметична кругла коробка 1, всередині якої створено вакуум. Величина деформації коробки пропорційна зміні атмосферного тиску (рис. 2.14).

Надлишковий тиск вимірюється манометрами (від гр. *manos* — рідкий).

Манометри бувають рідинні і механічні. Найпростішим рідинним манометром є п'езометр (від гр. *piezos* — тиск). П'езометр — вертикальна скляна трубка діаметром 5-8 мм (щоб усунути менісковий ефект), верхній кінець якої відкритий в атмосферу, а нижній кінець з'єднаний з посудиною (рис. 2.15). Рівень рідини в п'езометрі відповідає тискові в точці його підключення і дорівнює

$$p = \rho g h_p \quad (2.33)$$

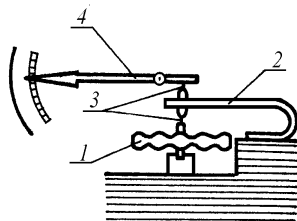
П'езометри дозволяють виміряти тиск, що відповідає висоті стовпа води 2...3 м (0,02...0,03 МПа).

При більших тисках в резервуарах чи в закритих посудинах використовують U-подібні манометри, заповнені ртуттю з густиною $\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$ (рис. 2.16).

U-подібні ртутні манометри забезпечують високу точність вимірювання і складаються із скляної U-подібної трубки, закріпленої на панелі з міліметровою шкалою.

Один кінець трубки підключається до посудини, в якій необхідно виміряти тиск, а другий є відкритим, з'єднаним з атмосферою.

Трубка заповнена ртуттю на половину висоти. До підключення



1 — чутливий елемент;
2 — пружина; 3 — передавальні елементи; 4 — стрілка

Рисунок 2.14 — Принципова схема барометра

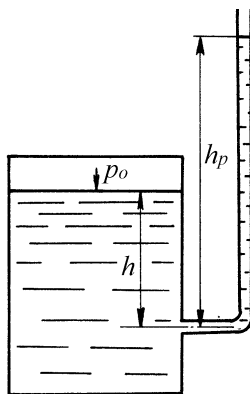


Рисунок 2.15 — Схема п'езометра

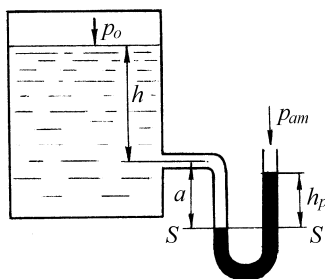


Рисунок 2.16 — Схема U-подібного манометра

манометра ртуть буде перебувати на одному рівні. Після того як манометр буде приєднаний до посудини під тиском, рівень ртуті у лівому коліні понизиться, а в правому — підніметься вгору до повної рівноваги системи на рівні $S - S'$ і абсолютний тиск буде дорівнювати

$$p_{abc} = p_{am} + \rho_{pm} g h_p. \quad (2.34)$$

За допомогою ртутних манометрів можна вимірювати тиск до 0,3...0,4 МПа.

Більш досконалими є ртутно-чашкові манометри, що діють за принципом U-подібного манометра, в якому одне коліно (ліве) замінено чашкою (рис. 2.17). Він складається з металевої чашки, наповненої ртуттю і з'єднаної з посудиною, в якій вимірюється тиск, і відкритою скляною трубкою — п'єзометром. За нуль шкали приймається рівень ртуті в чашці. Тоді

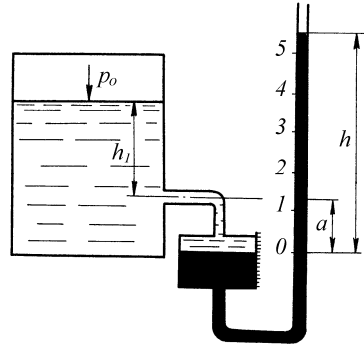


Рисунок 2.17 — Схема ртутно-чашкового манометра

$$p = \rho_{pm} g h \pm \rho g a, \quad (2.35)$$

де a — постійна величина поправки для даного приладу.

Таким чином, для визначення тиску p необхідно лише виміряти висоту стовпчика ртуті над нулем шкали.

Коли необхідно виміряти різницю тисків у двох посудинах або у двох точках рідини в одній і тій самій посудині, використовують так званий диференціальний манометр (рис. 2.18).

Припустимо, що тиск в точці A лівої посудини дорівнює $p = p_1$, а в точці B , яка знаходиться в правій посудині на рівні точки A , дорівнює $p = p_2$. Величину тиску p на поверхні ртуті в лівому коліні (точка C) можна знайти зі співвідношення

$$p = p_1 - \rho g h_0 = p_2 - \rho g (h_0 + \Delta h) + \rho_{pm} g \Delta h. \quad (2.36)$$

Звідки, різниця тисків в точках A і B $\Delta p = p_1 - p_2$ дорівнює

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_{pm} g \Delta h - \rho g \Delta h, \quad (2.37)$$

або

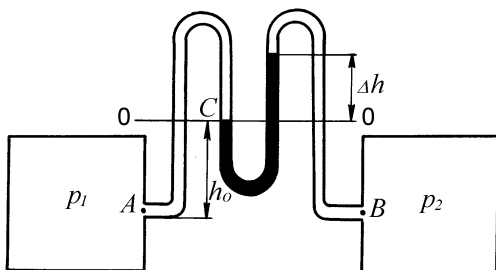


Рисунок 2.18 — Схема диференціального манометра

$$\Delta p = (\rho_{pm} - \rho)g \Delta h. \quad (2.38)$$

Таким чином, різниця тисків Δp визначається різницею рівнів у двох колінах диференціального манометра.

Мікроманометри використовують при вимірюваннях незначних тисків з високою точністю. Одна із конструкцій мікроманометра — похилий мікроманометр (рис. 2.19). Мікроманометр включає в себе резервуар A , приєднаний до посудини, в якій вимірюється тиск, та манометричну трубку B , кут нахилу якої до горизонту α можна змінювати.

Величина тиску визначається за такою залежністю:

$$p = \rho g \sin \alpha \cdot l. \quad (2.39)$$

Порівняно зі звичайним манометром мікроманометр має більшу точність вимірювань, тому що замість малої висоти h вимірюється довжина l , яка тим більша, чим менший кут α . Мікроманометри заповнюють водою або спиртом.

Для вимірювання високих тисків використовують механі-

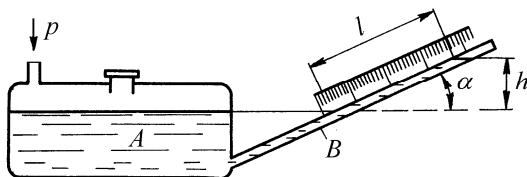


Рисунок 2.19 — Конструкція мікроманометра

чні манометри. Найбільш розповсюдженим серед них є пружинний манометр, зображений на рис. 2.20. Він складається із пустотілої тонкостінної латунної трубки у вигляді витка з сегментоподібним перерізом, т. зв. пружини Бурдона. Кінець пружини запаяний і з'єднаний системою передач з стрілкою, що вказує на шкалу, проградуйовану в необхідному діапазоні тиску від 0 до p_{max} . Відкритий кінець (початок трубки) з'єднується з посудиною, в якій вимірюється тиск. Під дією тиску пружина поступово розпрямляється і через зубчатий механізм приводить в рух стрілку, за відхиленням якої на шкалі визначають значення тиску. За допомогою пружинних манометрів можна вимірювати тиск у широкому діапазоні. Згідно з існуючими стандартами випускають робочі і взірцеві манометри з діапазоном заміру тиску в межах від 0 до $n \cdot (0,1; 0,16; 0,25; 0,4; 0,6)$ МПа. Тут n — число кратності шкали, яке дорівнює 1, 10, 100 і 1000. Деякі спеціальні конструкції пружинних манометрів дозволяють вимірювати тиски до 981 МПа. Пружина може бути багатовитковою (т. зв. пружина Гелікса). Перевага таких манометрів в більшій стабільності їх роботи і довговічності.

Крім пружинних є мембранні манометри, в яких рідина діє на тоненьку металеву (або з прогумованої матерії) пластинку-мембрану. Деформація мембрани пропорційна величині тиску і за допомогою системи важелів передається стрілці. Схему такого манометра зображено на рис. 2.21.

Мембранні манометри виготовляються для вимірювання тисків у діапазоні від 0,02 до 2,9 МПа.

Для вимірювання тисків, нижчих від атмосферного, коли в посудині є вакуум, використовують прилади, які називаються вакуумметрами.

Рідинні вакуумметри принципово нічим не відрізняються від ртутних манометрів.

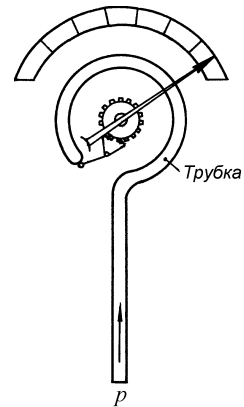


Рисунок 2.20 — Схема пружинного манометра

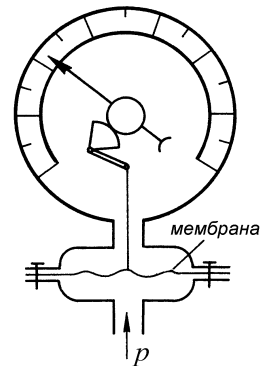


Рисунок 2.21 — Схема мембранного манометра

метрів і являють собою заповнену ртуттю U-подібну трубку (рис. 2.22), один кінець якої з'єднаний з посудиною, де вимірюється вакуум, а другий є відкритим.

Наприклад, необхідно виміряти тиск газу в посудині. В цьому випадку маємо

$$p_{at} = p_0 + \rho_{рт} g h_{вак}, \quad (2.40)$$

звідки

$$p_0 = p_{at} - \rho_{рт} g h_{вак}. \quad (2.41)$$

Висоту $h_{вак} = \frac{p_{at} - p_0}{\rho_{рт} g}$, що відповідає вакууму в посудині

($p_{вак} = p_{at} - p_0$), називають *вакуумметричною висотою*.

Не завжди рідинні манометри та вакуумметри заповнюють ртуттю. В окремих випадках (залежно від призначення та умов роботи) використовують інші рідини. При цьому необхідно мати на увазі, що для заповнення вакуумметрів не можна використовувати рідини, що легко випаровуються (спирт, ефір), тому що при зниженому тиску вони будуть інтенсивно випаровуватися і можуть закипіти.

Принцип дії механічних вакуумметрів та описаних вище манометрів однаковий, тому їх конструкція повністю повторює конструкцію манометрів. Так, наприклад, принцип дії існуючих мембранних вакуумметрів заснований на деформації мембрани, яка прогинається під дією атмосферного тиску, після того як під неї підвели вакуум.

Пружинні вакуумметри працюють на тому ж принципі, що

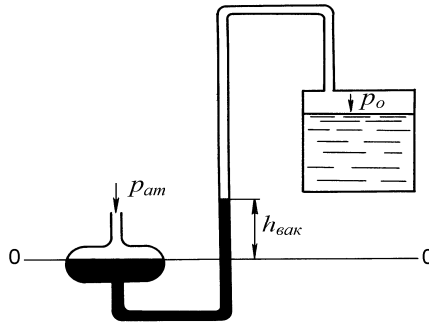


Рисунок 2.22 — Конструкція рідинного вакуумметра

і пружинні манометри.

Крім цього, є прилади, які називаються *мановакуумметрами*, за допомогою яких можна заміряти як надлишковий тиск, так і розрідження. Шкала мановакуумметрів має діапазон вимірювання від мінус 0,1 до (0,06; 0,15; 0,3; 0,5) МПа.

Приклад 2.6. Знайти абсолютний тиск на вільній поверхні в закритій посудині з бензином, якщо рівень рідини у відкритому п'єзометрі (рис. 2.23) вищий від рівня рідини в посудині на $h = 2$ м, а атмосферний тиск $p_{атм} = 9,81 \cdot 10^4$ Па. Густина бензину $\rho = 750$ кг/м³.

Розв'язок: З основного рівняння гідростатики випливає, що у всіх точках, які лежать в одній горизонтальній площині, тиск однаковий. Отже, тиск у точці A , що є у відкритому п'єзометрі на рівні вільної поверхні води в посудині, дорівнює p_0 . Абсолютний тиск у точці A буде рівний

$$p_{абсA} = p_{атм} + \rho gh.$$

Отже,

$$p_0 = p_{атм} + \rho gh = 9,81 \cdot 10^4 + 750 \cdot 9,81 \cdot 2 = 112815 \text{ Па.}$$

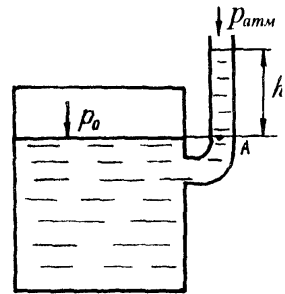


Рисунок 2.23 — Розрахунок тиску за допомогою п'єзометричної трубки

2.5 Закон сполучених посудин

Розглянемо дві сполучені посудини (рис. 2.24), які заповнені незмішуваними рідинами. Нехай рідини зрівноважились і перебувають у стані спокою. Густина рідин відповідно ρ_1 і ρ_2 , p_1 і p_2 — тиски на вільній поверхні рідин в посудинах A і B . Проведемо через границю розділу двох рідин площину рівного тиску, слід якої на рисунку — горизонтальна лінія $a-b$. Гідростатичні тиски в точках 1 і 2, як і в інших точках, які лежать на цій площині, будуть однакові, тобто

$$p = p_1 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \rho_2 g h_2, \quad (2.42)$$

де h_1 і h_2 — глибини занурення точок 1 і 2 відносно вільних поверхонь рідин.

Рівняння (2.42) називають законом сполучених посудин, який описує в загальному вигляді умову рівноваги рідин. Роз-

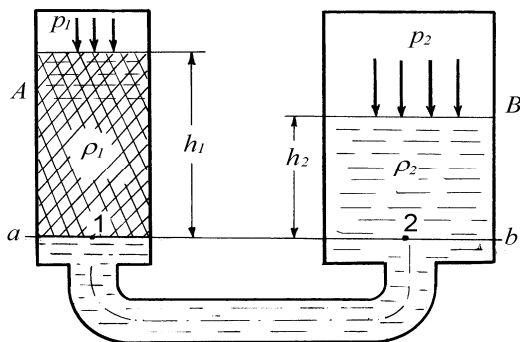


Рисунок 2.24 — Дія тиску у сполучених посудинах

глянемо окремі випадки рівноваги рідин у сполучених посудинах.

Випадок 1. В посудини налито однорідну рідину, але тиски на її вільні поверхнях різні, тобто $\rho_1 = \rho_2$, а $p_1 \neq p_2$.

Тоді

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1) \quad (2.43)$$

або

$$h_1 - h_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \quad (2.44)$$

Якщо в двох сполучених посудинах міститься однорідна рідина, то різниця рівнів відповідає п'езометричному напорові, визначеному за різницею тисків.

Випадок 2. В посудини налито однорідну рідину і тиски на її вільних поверхнях однакові, тобто $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ і $p_1 = p_2$.

Тоді

$$h_1 = h_2,$$

тобто вільні поверхні однорідної рідини в сполучених посудинах є на однаковому рівні відносно площини порівняння.

Випадок 3. В посудини налито різні рідини, що не змішуються $\rho_1 \neq \rho_2$, але з однаковими тисками на вільній поверхні $p_1 = p_2$. З рівності (2.42) маємо

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad (2.45)$$

або

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (2.46)$$

Отже, якщо рідини в двох сполучених посудинах різні, то за однакових тисків на вільній поверхні висоти їх рівнів обернено пропорціональні густині.

Принцип сполучених посудин широко використовують у техніці при замірі рівнів рідини в закритих посудинах, визначенні густини рідини, перепаду тисків на певній довжині трубопроводу, місцевому опорі чи між посудинами, встановленні величини вакууму тощо.

Приклад 2.7. Дві відкриті сполучені посудини (рис. 2.25) заповнені водою та ртуттю. Визначити різницю рівнів h в обох посудинах, якщо висота стовпчика ртуті над площиною розділу $h_1 = 80$ мм.

Розв'язок: Тиск на рівні 0-0 в обох посудинах однаковий. У лівій посудині цей тиск створюється стовпчиком води h_2 , а у правій посудині стовпчиком ртуті h_1 . Отже,

$$\rho_e g h_2 = \rho_{pm} g h_1.$$

Таким чином висота стовпчика води над площиною розділу

$$h_2 = \frac{h_1 \rho_{pm}}{\rho_e} = \frac{0,08 \cdot 13600}{1000} = 1,088 \text{ м.}$$

Різниця рівнів у посудинах

$$h = h_2 - h_1 = 1,088 - 0,08 = 1,008 \text{ м.}$$

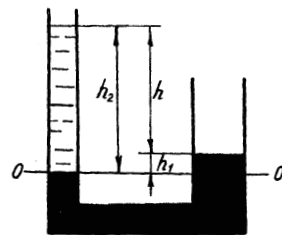


Рисунок 2.25 — Визначення рівнів рідини в сполучених посудинах

2.6 Закон Паскаля і його практичне значення

В об'ємі рідини, зображеному на рис. 2.26, на довільних глибинах $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ визначимо абсолютний тиск у точках 1, 2, 3, ..., n

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_0 + \rho g h_1 \\
 p_2 &= p_0 + \rho g h_2 \\
 p_3 &= p_0 + \rho g h_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_n &= p_0 + \rho g h_n
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

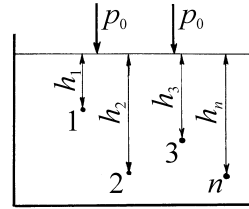


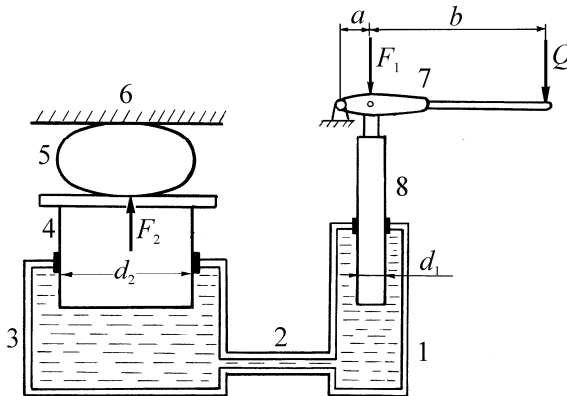
Рисунок 2.26 — Визначення дії зовнішнього тиску

Порівнюючи рівняння (2.47), ми бачимо, що зовнішній тиск всередині об'єму рідини передається кожній окремо взятій точці n однаково, і абсолютний тиск визначається величиною глибини її занурення відносно вільної поверхні рідини.

Це і є відомий закон Паскаля (1642 р.) про передачу зовнішнього тиску в довільній точці всередині об'єму рідини. Він є теоретичною основою об'ємного гідроприводу і гідропередач, статичних гідромашин (гідропрес, гідродомкрат, гідроаккумулятор) і перетворювачів тиску (гідромультиплікатор).

Розглянемо принцип дії гідравлічного преса (рис. 2.27).

Гідравлічний прес використовують для одержання великих стискаючих зусиль, які необхідні, наприклад, для деформації металів при обробці їх тиском (пресування, ковка, штампування) і т.д. Прес складається з двох циліндрів 1 і 3 малого і



1 — малий гідроциліндр; 2 — трубопровід; 3 — великий гідроциліндр; 4 — великий поршень; 5 — тіло; 6 — плита; 7 — важіль; 8 — малий поршень

Рисунок 2.27 — Схема гідравлічного преса

великого діаметрів, з'єднаних між собою трубопроводом 2. В малому циліндрі є поршень 8 діаметром d_1 , у великому — поршень 4 діаметром d_2 , на якому розміщене тіло 5. Коли до малого поршня прикладається сила F_1 , він починає рухатися вниз, створюючи в рідині тиск $p = F_1/S_1$.

За законом Паскаля цей тиск передається всьому об'ємові рідини однаково і його сила на поршень d_2 дорівнює

$$F_2 = pS_2, \quad (2.48)$$

або

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} = p \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2. \quad (2.49)$$

Під дією цієї сили поршень діаметром d_2 разом з тілом 5 починає рухатися вгору, поки тіло не торкнеться нерухомої плити 6. При дальшому його підйомі почнеться процес пресування (стиснення) тіла.

Якщо гідравлічний прес із ручним приводом, то величину сили F_1 можна збільшити завдяки плечовому важелю 7, встановленому на малому циліндрі, як показано на рис. 2.27. Тоді зусилля

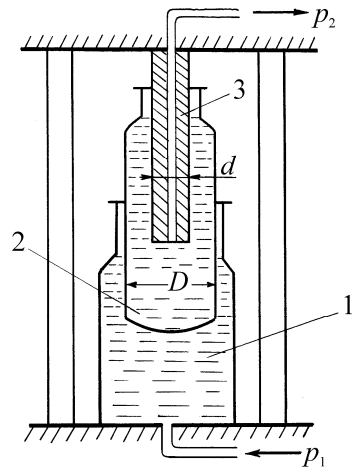
$$F_1 = \frac{a+b}{a} Q, \quad (2.50)$$

а зусилля, яке розвиває гідравлічний прес, дорівнює

$$F_2 = Q \left(\frac{a+b}{a} \right) \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2. \quad (2.51)$$

Якщо в гідравлічному пресі немає нерухомої плити M , то пристрій виконує роль підйомника (домкрата).

Розглянемо принцип дії гідравлічного мультиплікатора або перетворювача тиску (рис. 2.28). Призначення мультиплікатора — підвищення тиску в системі. Мультиплікатор складається з цилін-



1 — циліндр; 2 — поршень-циліндр; 3 — плунжер

Рисунок 2.28 — Гідравлічний мультиплікатор

ндра 1, усередину якого входить рухомий порожнистий циліндр 2 діаметром D . Останній ковзає по нерухомому плунжеру з діаметром d . По осі плунжера проведена трубка для відведення рідини з підвищеним тиском. Якщо в циліндр 1 подавати рідину під тиском p_1 , то на плунжер 3 діятиме сила $F = p_1 S_1$, де $S_1 = \pi D^2/4$. Оскільки $F = p_1 S_1 = p_2 S_2$, а $S_2 = \pi d^2/4$, то при знехтуванні силою тертя тиск на виході мультиплікатора

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2} = p_1 \frac{D^2}{d^2}. \quad (2.52)$$

Необхідне збільшення тиску p_2/p_1 можна розрахувати шляхом підбору величин S_1 і S_2 . Слід відзначити, що гідравлічний прес і гідромultiплікатор мають холостий хід, при якому поршні вертаються у вихідне положення і під час якого не виконується корисна робота.

2.7 Сила тиску рідини на плоскі поверхні

2.7.1 Визначення величини сили тиску на плоску поверхню

Розглянемо випадок, коли плоска поверхня S (слід якої на рис. 2.29 — AB) обмежена довільним контуром і нахилена до горизонту під кутом α , занурена в рідину густиною ρ . На вільній поверхні рідини діє зовнішній тиск p_0 (рис. 2.29). Знайдемо силу тиску рідини на цю поверхню. Для цього помістимо початок координат xOy в точку O перетину вільної поверхні рідини з продовженням сліду площини S , сумістивши з ним вісь Oy . На відстані y від початку координат на глибині h виділимо елементарну площину dS . Припускаємо, що гідростатичний тиск на елементарну площину dS є величиною стала. Тоді елементарна сила тиску dF на цю площину дорівнює

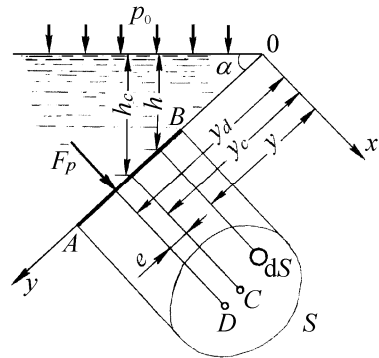


Рисунок 2.29 — Визначення сили тиску рідини на плоску стінку

$$d\vec{F}_p = -\vec{n}(p_0 + \rho gh)dS = -\vec{n}(p_0 + \rho gy \sin \alpha)dS, \quad (2.53)$$

де \vec{n} — одиничний вектор нормалі елементарної площини.

Для того, щоб визначити силу тиску на всю площину, проінтегруємо (2.53) по площі S даної поверхні.

$$F_p = \int_S (p_0 + \rho gy \sin \alpha)dS. \quad (2.54)$$

З теоретичної механіки відомо, що інтеграл $\int_S y dS$ є статичним моментом площини S відносно осі Ox , який дорівнює добутку площі на ординату її центра ваги

$$\int_S y dS = y_c S. \quad (2.55)$$

Враховуючи, що $y_c \sin \alpha = h_c$, а величини p_0 , ρ , h_0 , g і α є сталі, знайдемо повну силу тиску рідини на плоску поверхню:

$$F_p = p_0 S + \rho g h_c S, \quad (2.56)$$

або

$$F_p = (p_0 + \rho g y_c \sin \alpha)S. \quad (2.57)$$

Таким чином, повна сила тиску рідини на плоску поверхню дорівнює добутку гідростатичного тиску в центрі її ваги (геометричному центрі) на її площу.

А тепер розглянемо два крайні випадки, коли кут нахилу площини до горизонту дорівнює 90° і 0° .

1) Площина вертикальна. $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$.

У цьому випадку координата центра мас змочуваної поверхні $y_c = h_c$ і сила тиску згідно з виразом (2.57) дорівнює

$$F_p = (p_0 + \rho g h_c)S, \quad (2.58)$$

де h_c — глибина занурення геометричного центра змочуваної поверхні вертикальної площини;

S — площа змочуваної поверхні вертикальної площини;

p_0 — величина надлишкового тиску на вільній поверхні рідини.

2) Площина горизонтальна. $\alpha = 0^\circ$, $\sin \alpha = 0$.

Якщо горизонтальна поверхня розміщена на глибині H , то очевидно, що для неї глибина центру мас $h_c = H$. Тоді сила тиску на горизонтальну плоску поверхню згідно з (2.56) визначається за такою залежністю:

$$F_p = (p_0 + \rho g H) S, \quad (2.59)$$

Згідно з виразом (2.59) сила тиску на плоскі горизонтальні поверхні залежить від висоти наливу рідини і площі даної поверхні, і не залежить від об'єму рідини, яка є над даною поверхнею. На перший погляд таке твердження здається помилковим, і в гідравліці даний ефект отримав назву «*гідравлічний парадокс*».

Для прикладу розглянемо посудини різної форми, площі дна в яких однакові (рис. 2.30).

Заповнимо дані посудини рідиною сталої густини на однакову висоту H . Незважаючи на те, що в першій посудині об'єм рідини максимальний, а в третій мінімальний — сила тиску на дно будь-якої із посудин буде однакою.

Визначення сили тиску на плоскі прямі і похилі поверхні необхідне при розрахунку гребель, дамб, зливних шлюзів; товщини стінок сталевих, бетонних і дерев'яних перегородок в амбарах, резервуарах і потоках; розрахунку шиберів, засув і заслінок, зворотних клапанів; розрахунку товщини стінок трубопроводів, резервуарів і посудин, що працюють під високими тисками.

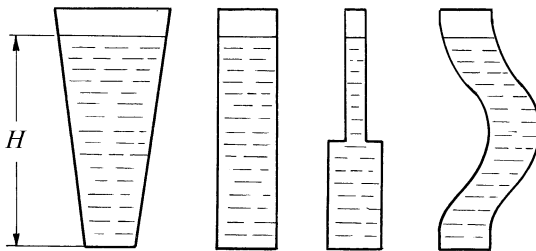


Рисунок 2.30 — Визначення сили тиску на дно посудин різної форми

2.7.2 Знаходження точки прикладання сили надлишкового тиску рідини на плоску поверхню

Згідно з формулою (2.56) повна сила тиску на плоску поверхню, занурену в рідину, складається із зовнішньої сили тиску ($p_0 S$) і сили надлишкового тиску ($\rho g h_c S$). Зовнішній тиск p_0 розподіляється по поверхні рідини рівномірно, передається кожній частинці об'єму рідини однаково (закон Паскаля), тому точка прикладання його сили завжди знаходиться в геометричному центрі площини з ординатою y_c . Надлишковий тиск ($\rho g h_c$) залежить від h_c , тому точка прикладання його сили завжди знаходитиметься нижче геометричного центра площини на величину ексцентриситету (зміщення) e (див. рис. 2.29) з ординатою y_d (так званою ординатою точки прикладання надлишкового тиску). Тобто

$$y_d = y_c + e. \quad (2.60)$$

Для визначення величини e використаємо теорему теоретичної механіки про рівність суми моментів елементарних сил тиску ($\sum_{i=1}^n dF_{pi} y_i$) моментів рівнодійної ($F_p y_d$) відносно тієї ж осі (Ox)

$$\sum_{i=1}^n dF_{pi} y_i = F_p y_d. \quad (2.61)$$

Враховуючи, що

$$dF_{pi} y_i = \rho g h y dS = \rho g y^2 \sin \alpha dS,$$

а

$$F_p = \rho g h_c S = \rho g y_c \sin \alpha S,$$

рівність (2.61) представимо у такому вигляді

$$\rho g \sin \alpha \int_S y^2 dS = \rho g \sin \alpha (y_c \cdot y_d) S.$$

Інтеграл $\int_S y^2 dS = J_x$ є моментом інерції площини S відносно осі Ox . Тоді

$$y_d = \frac{J_x}{y_c S}. \quad (2.62)$$

Момент інерції площини відносно осі Ox можна виразити через момент інерції площини відносно центральної осі

$$J_x = J_0 + y_c^2 S. \quad (2.63)$$

де J_0 — центральний момент інерції відносно горизонтальної осі, яка проходить через центр мас площі S .

Центральний момент інерції залежить від форми плоскої поверхні і поданий у довідниках. Зокрема для квадрата зі стороною a момент інерції $J_0 = a^4/4$; для прямокутника з основою b і висотою h — $J_0 = bh^3/12$; для трикутника з основою b і висотою h — $J_0 = bh^3/36$; для кола діаметром d — $J_0 = \pi d^4/4$ і т.д.

З врахуванням (2.63) координату точки прикладання сили тиску від ваги рідини на плоску поверхню, яку ще називають центром тиску, можна визначити згідно з виразом

$$y_d = y_c + \frac{J_0}{y_c S}. \quad (2.64)$$

Приклад 2.8. Визначити силу тиску і точку її прикладання на плоску прямокутну стінку, ширина якої $b = 1,5$ м. Стінка нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Стінка перебуває на глибині $H = 1,2$ м у відкритій посудині (рис. 2.31).

Розв'язок: Довжина змоченої частини стінки

$$l = \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1,2}{0,5} = 2,4 \text{ м}$$

Площа стінки

$$S = l \cdot b = 2,4 \cdot 1,5 = 3,6 \text{ м}^2.$$

Якщо посудина відкрита, тоді надлишковий тиск на поверхні рідини $p_0 = 0$ і сила тиску, яка діє на стінку, буде дорівнювати

$$F_n = \rho g h_c S = \rho g \frac{H}{2} S = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1,2}{2} \cdot 3,6 = 21190 \text{ Н}$$

Момент інерції змоченої площі стінки відносно осі, яка проходить через центр тяжіння,

$$J_0 = \frac{bl^3}{12} = \frac{1,5 \cdot 2,4^3}{12} = 1,728 \text{ м}^4.$$

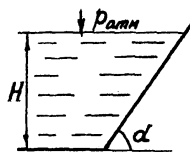


Рисунок 2.31 — Розрахунок зусилля на плоску похилу стінку (до задачі 2.8)

Сила тиску прикладена в центрі тиску з координатою

$$y_d = y_c + \frac{J_0}{y_c S} = 1,2 + \frac{1,728}{1,2 \cdot 3,6} = 1,6 \text{ м.}$$

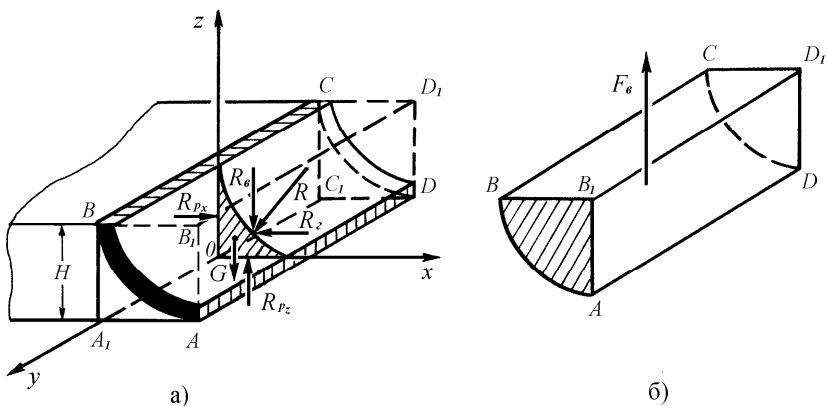
2.8 Сила тиску рідини на криволінійні поверхні

Великий клас задач гідромеханіки пов'язаний з визначенням сили тиску рідини на криволінійні поверхні (стілки резервуарів, трубопроводи, кришки оглядових люків).

Для визначення повної сили тиску на будь-яку криволінійну поверхню виділимо в рідині об'єм AA_1BCC_1D , який зверху обмежено криволінійною поверхню $ABCD$ (рис. 2.32, а), і запишемо умову рівноваги виділеного об'єму рідини.

Розглянемо, які сили діють на цю рідину:

- 1) з боку плоскої вертикальної поверхні A_1BCC_1 на виділену рідину діє реакція R_{px} ;
- 2) з боку плоскої горизонтальної поверхні AA_1C_1D — реакція R_{pz} ;
- 3) з боку криволінійної поверхні $ABCD$ — реакція R , яку розкладемо на горизонтальну R_x , та вертикальну — R_z складові;
- 4) з боку рідини в обмеженому об'ємі діє сила ваги G .



а) схема дії сил; б) об'єм тіла тиску

Рисунок 2.32 — Визначення сили тиску на криволінійну поверхню

Згідно з принципом д'Аламбера, виділений об'єм рідини перебуває в стані рівноваги у випадку, коли сума проєкцій всіх зовнішніх сил на координатні осі та сума моментів відносно будь-якої точки дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = R_{p_x} - R_z = 0, \quad (2.65)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{zi} = R_{p_z} - R_g + G = 0. \quad (2.66)$$

Сила тиску рідини на криволінійну стінку $ABCD$ рівна за величиною і протилежна за напрямом до реакції цієї стінки R . Тоді з рівності (2.65) випливає, що величина горизонтальної складової сили тиску на криволінійну поверхню F_z дорівнює силі тиску на плоску вертикальну площину A_1BCC_1 , яка є проєкцією криволінійної поверхні на вертикальну площину

$$F_z = R_z = R_{p_x}. \quad (2.67)$$

З попереднього параграфу відомо, що сила тиску на плоскі вертикальні стінки дорівнює добутку надлишкового тиску в геометричному центрі поверхні на її площу. З врахуванням даного горизонтальна складова сили тиску на криволінійну поверхню дорівнює

$$F_z = (p_0 + \rho g h_c) S_g, \quad (2.68)$$

де S_g — площа проєкції криволінійної поверхні на вертикальну площину;

h_c — глибина занурення геометричного центра проєкції S_g ;

p_0 — величина надлишкового тиску на вільній поверхні рідини.

В свою чергу згідно з рівністю (2.66) величина вертикальної складової сили тиску на криволінійну поверхню F_g дорівнює різниці величини сили тиску на горизонтальну площину AA_1C_1D і ваги виділеного об'єму рідини AA_1BCC_1D . Необхідно зауважити, що горизонтальна поверхня AA_1C_1D — це проєкція криволінійної поверхні на горизонтальну площину.

$$F_g = R_g = R_{p_z} - G. \quad (2.69)$$

Як відомо, сила тиску на горизонтальну поверхню дорівнює добутку величини надлишкового тиску на її площу. Тому

$$F_g = (p_0 + \rho g H) S_z - \rho g V, \quad (2.70)$$

де H — глибина занурення проекції горизонтальної поверхні; S_z — площа горизонтальної поверхні, тобто площ проекції криволінійної поверхні на горизонтальну площину; V — величина виділеного об'єму AA_1BCC_1D .

Величина $(p_0 + \rho g H) S_z - \rho g V$ у формулі (2.70) є не що інше, як вага об'єму рідини, який обмежений знизу криволінійною поверхнею, зверху п'єзометричною площиною та вертикальною площиною, яка є твірною до даної криволінійної поверхні (рис. 2.32, б). Даний об'єм у гідромеханіці отримав назву *об'єм тіла тиску* $V_{\text{тт}}$. Використовуючи цей об'єм величина вертикальної складової сили тиску може бути розрахована за формулою

$$F_g = \rho g V_{\text{тт}}. \quad (2.71)$$

У випадку, коли об'єм тіла тиску є в рідині, його називають активним (рис. 2.33, а, б) і в цьому випадку вертикальна складова сили тиску завжди направлена вниз. Коли об'єм тіла тиску є за межами рідини, його називають пасивним (рис. 2.33, в), а вертикальна складова сили тиску направлена вгору.

Результуюче значення сили тиску F на криволінійну поверхню визначаємо за формулою

$$F = \sqrt{F_z^2 + F_g^2}. \quad (2.72)$$

Для визначення точки прикладання сили тиску на криволінійну поверхню скористайтесь третьою ознакою рівноваги

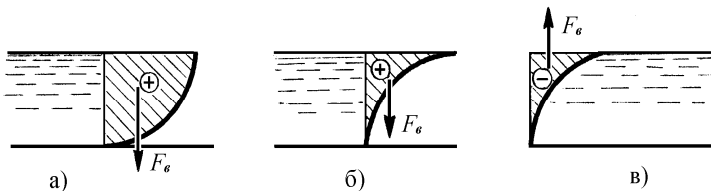


Рисунок 2.33 — Визначення об'єму активного (а, б) та пасивного (в) тіла тиску

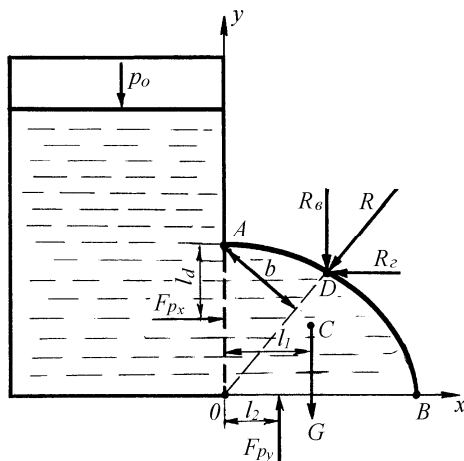


Рисунок 2.34 — Визначення точки прикладання сили тиску на криволінійну поверхню

виділеного об'єму рідини — сума моментів всіх сил, прикладених до виділеного об'єму, дорівнює нулю.

Для цього визначимо суму моментів всіх сил, прикладених до виділеного об'єму ABO відносно точки A (рис. 2.34)

$$R \cdot b + G \cdot l_1 - F_{px} \cdot l_d - F_{py} \cdot l_2 = 0. \quad (2.73)$$

З рівності (2.71) знаходимо величину b — плече сили R відносно точки A .

Якщо криволінійна поверхня має кривизну в трьох напрямках (наприклад, сферична поверхня), результуюча сила тиску визначається векторною сумою трьох складових:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z, \quad (2.74)$$

де \vec{F}_x — проекція сили на вісь Ox ;

\vec{F}_y — проекція сили на вісь Oy ;

\vec{F}_z — проекція сили на вісь Oz .

Величина горизонтальних проекцій F_x та F_y визначається через вертикальні проекції криволінійної поверхні у відповід-

них напрямках за аналогією з визначенням горизонтальної складової F_z , а величина проекції F_z — по аналогії з F_g .

Приклад 2.9. Визначити силу тиску води на кожну з півкульових кришок люків, які закривають отвори діаметром $d = 0,5$ м, якщо $h = 1,5$ м, а глибина занурення центра камери від вільної поверхні води $H = 2,5$ м (рис. 2.35).

Розв'язок: Сила тиску води на нижню кришку дорівнює вертикальній складовій, тобто вазі води в об'ємі тіла тиску $V_{\text{ТТ1}}$

$$F_{z_1} = \rho g V_{\text{ТТ1}} = \rho g \left(\frac{\pi d^2}{4} h_1 + \frac{\pi d^3}{12} \right).$$

$$\text{Тоді} \quad F_{z_1} = 1000 \cdot 9,81 \left(\frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} 3,25 + \frac{3,14 \cdot 0,5^3}{12} \right) = 6676 \text{ Н},$$

$$\text{де } h_1 = H + \frac{h}{2} = 2,5 + \frac{1,5}{2} = 3,25 \text{ м}.$$

Горизонтальна складова дорівнює нулю, оскільки на праву і ліву половини кришки діють однакові, але протилежно напрямлені сили тиску.

Сила тиску на верхню кришку дорівнює своїй вертикальній складовій, тобто вазі води в об'ємі тіла тиску $V_{\text{ТТ2}}$

$$\begin{aligned} F_{z_2} &= \rho g V_{\text{ТТ2}} = \rho g \left(\frac{\pi d^2}{4} h_2 - \frac{\pi d^3}{12} \right) = \\ &= 1000 \cdot 9,81 \left(\frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} 1,75 - \frac{3,14 \cdot 0,5^3}{12} \right) = 3038 \text{ Н}, \end{aligned}$$

$$\text{де } h_2 = H - \frac{h}{2} = 2,5 - \frac{1,5}{2} = 1,75 \text{ м}.$$

Горизонтальна складова сили тиску на кришку, яка є збоку

$$F_{x_3} = \rho g h_c S_g = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} = 4802 \text{ Н},$$

$$\text{де } h_c = H.$$

Вертикальна складова сили тиску на кришку, яка є збоку, дорівнює різниці сил тиску, які діють на верхню і нижню половини

$$F_{z_3} = \rho g (V_1 - V_2) = \rho g \frac{\pi d^3}{12} = 1000 \cdot 9,81 \frac{3,14 \cdot 0,5^3}{12} = 323 \text{ Н}.$$

Повна сила тиску на кришку, яка є збоку,

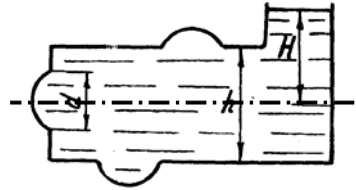


Рисунок 2.35 — Розрахунок сили тиску на криволінійні поверхні (до задачі 2.9)

$$F_3 = \sqrt{F_{x_3}^2 + F_{z_3}^2} = \sqrt{4802^2 + 323^2} = 4812 \text{ Н.}$$

Напряг сили тиску визначається кутом

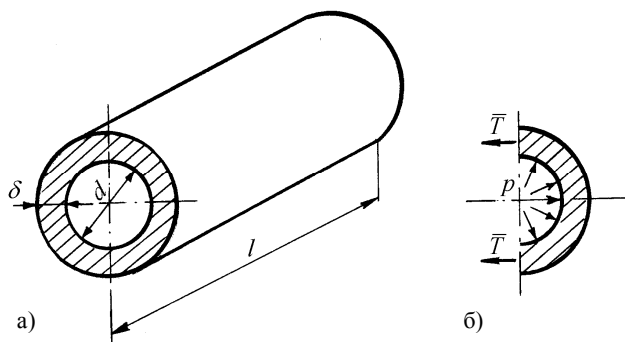
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{z_3}}{F_{x_3}} = \frac{323}{4802} = 0,067; \quad \angle \beta = 4^\circ.$$

Оскільки сила тиску напрямлена до поверхні кришки, тобто перпендикулярно до дотичної в точці її прикладання, лінія її дії проходить через центр кулі.

2.8.1 Визначення товщини стінки труб

Розглянемо трубу (рис. 2.36, а) з внутрішнім діаметром d , товщиною стінки δ і довжиною l . Труба заповнена рідиною під тиском p , що діє нормально до її поверхні S з силою

$$F_x = p d l. \quad (2.75)$$



а) переріз труби; б) схема дії сил

Рисунок 2.36 — Визначення сили дії рідини на внутрішню поверхню труб

В результаті в тілі труби з товщиною стінки δ виникають розривні напруження σ (див. рис. 2.36, б), що діють з силою T в кожному з повздовжніх перерізів стінки труби:

$$T = \delta l \sigma. \quad (2.76)$$

При зрівноваженні сил $F_x = 2T$ і $\sigma = \sigma_{zp}$

$$p d l = 2 \delta l \sigma_{zp}, \quad (2.77)$$

де σ_{zp} — граничне напруження в стінці труби.

З формули (2.77) знаходимо необхідну товщину стінки труби

$$\delta = \frac{pd}{2\sigma_{zp}}. \quad (2.78)$$

Значення граничного напруження σ_{zp} залежить від матеріалу труб і береться з довідників з врахуванням необхідного запасу міцності.

2.9 Закон Архімеда і основи теорії плавання тіл

Припустимо, що вертикальний циліндр, висота якого h , площа основи S і об'єм V , занурений в рідину густиною ρ (рис. 2.37). При цьому верхня основа циліндра занурена на глибину h_1 , а нижня — на глибину h_2 . Даний циліндр перебуває під дією таких сил гідростатичного тиску:

- 1) сили F_1 , що діє на верхню основу циліндра;
- 2) сили F_2 , що діє на нижню основу циліндра;
- 3) сили гідростатичного тиску, що діють з усіх сторін на вертикальну поверхню циліндра і направлені нормально до

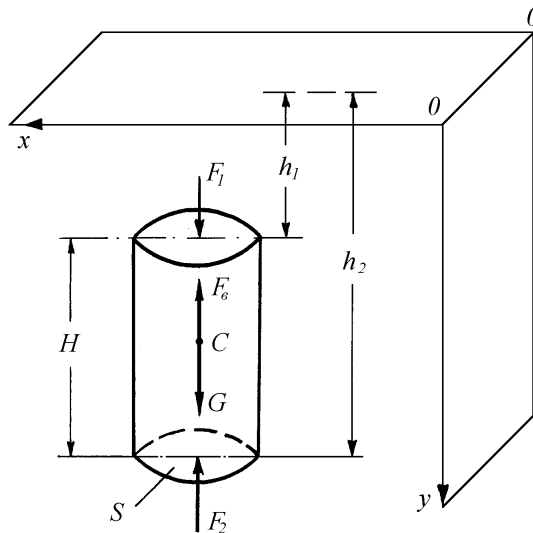


Рисунок 2.37 — Схема для виведення закону Архімеда

його вертикальної осі (вони будуть урівноважуватися між собою, тому що рівні за величиною і напрямлені в протилежні сторони).

Сила F_1 , що діє на верхню основу циліндра, дорівнює

$$F_1 = \rho_g g h_1 S. \quad (2.79)$$

Сила F_2 , що діє на нижню основу циліндра, дорівнює

$$F_2 = \rho_g g h_2 S. \quad (2.80)$$

Як видно з рис. 2.37, сила F_1 занурює циліндр, а сила F_2 виштовхує його з рідини.

Різницю сил

$$F_g = F_2 - F_1 \quad (2.81)$$

в гідравліці називають виштовхувальною силою або силою Архімеда.

Підставимо в (2.81) вирази (2.79) і (2.80). Тоді

$$F_g = \rho_g g h_2 S - \rho_g g h_1 S = \rho_g g (h_2 - h_1) S = \rho_g g H S. \quad (2.82)$$

З урахуванням того, що $HS = V$, є об'єм зануреного циліндра, залежність (2.81) матиме такий вигляд

$$F_g = \rho_g g V. \quad (2.83)$$

Рівняння (2.83) описує закон Архімеда, який можна сформулювати так: *На тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, яка напрямлена вертикально вгору і дорівнює вазі витісненої рідини.*

Виштовхувальна сила прикладена в центрі тяжіння витісненого об'єму рідини, який називається водотоннажністю. Центр водотоннажності у загальному випадку не співпадає з центром тяжіння плаваючого тіла.

Закон Архімеда має велике значення при розв'язуванні задач, які пов'язані з плаванням тіл.

В теорії плавання є дві основні задачі: плавучості і остійності.

Під поняттям плавучості розуміють здатність тіла плавати в напівзануреному стані.

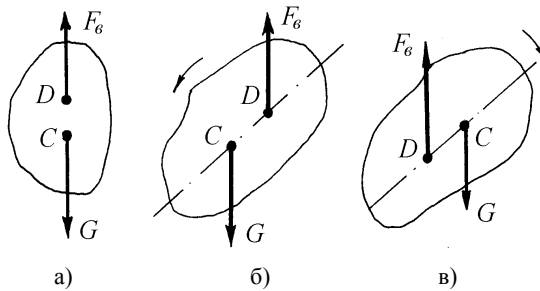
Остійність — здатність тіла відновлювати положення рівноваги при незначному його відхиленні від даного.

Плавучість тіла характеризується співвідношенням ваги тіла і величини виштовхувальної сили.

У випадку, коли виштовхувальна сила F_g менша, ніж вага тіла G — тіло тоне, коли F_g більша за G — тіло плаває, коли F_g дорівнює G — тіло плаває в зануреному стані незалежно від глибини занурення.

Крім умови $F_g = G$ для рівноваги тіла, зануреного в рідину, також необхідно, щоб точки прикладання цих сил лежали на одній вертикалі.

Якщо виштовхувальна сила F_g не діє по одній вертикальній прямій з силою ваги G , то тіло буде обертатися (рис. 2.38, б, в) доти, поки лінії дії даних сил не співпадуть (рис. 2.38, а).



а) тіло нерухоме; б) тіло обертається проти годинникової стрілки;
в) тіло обертається за годинниковою стрілкою

Рисунок 2.38 — Схема дії сил на тіло, занурене в рідину

Коли на повністю занурене в рідину тіло діє виштовхувальна сила F_g , величина якої більша, ніж його вага G , то дане тіло піднімається вверх (спливає) доти, поки дані сили не врівноважуються

$$G = F_g \quad (2.84)$$

або
$$mg = \rho g V. \quad (2.85)$$

де m — маса тіла.

При проектуванні та експлуатації плавучих засобів використовуються закони рівноваги плаваючих тіл. Приведемо основні поняття і терміни, які відносяться до даного питання.

Лінія перетину вільної поверхні води з боковою поверхнею судна називається ватерлінією. В навантаженому стані — це вагова ватерлінія.

Об'єм судна над нею являє собою запас плавучості. Запас плавучості визначається із залежності

$$n = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a}, \quad (2.86)$$

де ρ_a і ρ_c — густина води і судна.

При $n < 0$ судно тонутиме.

Ватерлінія визначає робочу площу судна і площину плавання $K-K$ (рис. 2.39), а вертикальна вісь, яка проходить через центр тяжіння судна і нормальна до площини плавання — вісь плавання $O-O$.

Крім виконання умови плавання (2.85), судно повинно відповідати умовам остійності. Плаваюче тіло буде остійним у тому випадку, коли при крені сила ваги G і архімедова сила F_a створюють момент, який спрямований повернути тіло у вихідне положення.

При надводному плаванні тіла (див. рис. 2.39) центр водотоннажності при малих кутах крену ($\alpha < 15^\circ$) переміщується по дузі, проведеної з точки перетину лінії дії сили F_a з віссю плавання $O-O$. Ця точка називається *метацентром тіла* M . Відстань між метацентром M і центром тяжіння судна називається *метацентричною висотою*.

Якщо центр тяжіння тіла C лежить нижче центра водотоннажності D , то плавання буде безумовно остійним. Якщо центр тяжіння тіла C (див. рис. 2.39) лежить вище центра водотоннажності D , то плавання буде остійним тільки при виконанні умови

$$r - e > 0, \quad (2.87)$$

де r — метацентричний радіус, тобто відстань між центром водотоннажності D і метацентром M ;

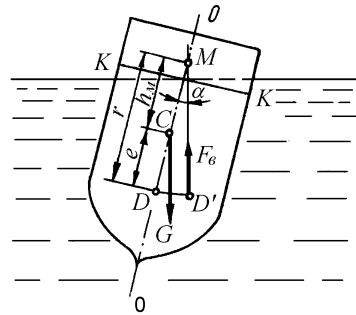


Рисунок 2.39 — Визначення метацентричної висоти

e — відстань між центром тяжіння тіла C і центром водотоннажності D .

Метацентричний радіус r визначається за формулою

$$r = \frac{I}{V}, \quad (2.88)$$

де I — момент інерції площини плавання відносно горизонтальної осі плавання тіла;

V — водотоннажність.

Знаючи метацентричний радіус, знайдемо метацентричну висоту h_M

$$h_M = r \pm e, \quad (2.89)$$

або

$$h_M = \frac{I}{V} \pm e. \quad (2.90)$$

Отже, для більшої остійності тіла необхідно збільшити момент інерції площини плавання. Перевіряти остійність плаваючого тіла треба відносно тієї осі, для якої момент інерції площини плавання менший. Переважно величина h_M коливається в межах $0,3 \dots 1,2$ м.

Приклад 2.10. Визначити мінімально допустиме розривне зусилля каната, що утримує напівзанурений сферичний об'єм вагою $G = 350$ Н і діаметром $d = 0,8$ м у плаваючому стані. Густина води $\rho = 1020$ кг/м³.

Розв'язок: Величина виштовхувальної сили рівна вазі води, витісненої зануреною половиною сфери

$$F_e = \rho g V = \rho g \frac{1}{2} \frac{\pi d^3}{6} = 1020 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,8^3}{6} = 1340,6 \text{ Н}.$$

Мінімально допустиме розривне зусилля в канаті

$$F_{min} = F_e - G = 1340,6 - 350 = 990,6 \text{ Н}.$$

2.10 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) В чому полягає фізичний зміст основного рівняння гідростатики?
- 2) Де знаходиться п'єзометрична поверхня у відкритій посудині?
- 3) Які сили діють при відносному спокої?
- 4) Який вигляд має ізобарична поверхня в рідині при обертанні посудини зі сталою кутовою швидкістю навколо вертикальної осі?

- 5) Який вигляд має ізобарична поверхня в рідині при прямолінійному русі рідини зі сталим прискоренням і яким рівнянням вона описується?
- 6) Як побудувати епюру розподілу тиску, якщо на вільній поверхні вакуум?
- 7) Яким приладом вимірюється атмосферний тиск?
- 8) Який тиск дозволяють вимірювати п'єзометри?
- 9) Яке призначення диференціального манометра?
- 10) Який вигляд має рівняння, що визначає закон сполучених посудин?
- 11) Яке практичне значення закону Паскаля?
- 12) Як визначається сила тиску на плоску стінку?
- 13) Що таке центр тиску?
- 14) Як визначається сила тиску на криволінійну поверхню?
- 15) Чому дорівнює горизонтальна складова сили тиску на криволінійну поверхню?
- 16) Визначте напрям вектора рівнодійної сили тиску на криволінійну поверхню.
- 17) Дайте визначення тіла тиску.
- 18) Сформулюйте закон Архімеда.

Контрольні тестові завдання

1. Що означають величини X , Y та Z в рівнянні $Xdx + Ydy + Zdz = 0$?
 - а) Одиничні масові сили.
 - б) Проекції сил на осі обертання.
 - в) Проекції сил, віднесених до одиниці маси, на осі координат.
2. Чи зміниться форма параболоїда обертання, якщо збільшити кількість обертів. Якщо зміниться, то як?
 - а) Залишиться без змін.
 - б) Висота його зменшиться.
 - в) Висота його збільшиться.
3. Які поверхні є поверхнями рівня?
 - а) Поверхні різного надлишкового тиску.
 - б) Поверхні рівного тиску.
 - в) Поверхні різного абсолютного тиску.
4. Який тиск визначають за допомогою п'єзометра?
 - а) Надлишковий тиск на поверхні рідини.
 - б) Надлишковий тиск в точці під'єднання.
 - в) Сума надлишкового та атмосферного тисків.
5. З однієї сторони в частково заповнену водою відкриту U-подібну трубку добавили бензин. Порівняйте між собою рівень бензину h_6 і рівень води $h_в$, які відраховуються від межі розподілу рідин:
 - а) $h_6 < h_в$;

- б) $h_6 > h_6$;
- в) $h_6 = h_6$.

6. В посудині А є вода, в посудині В — бензин. Якщо рівень рідини в обох посудинах однаковий, то яке співвідношення між гідростатичними тисками на дні посудини?

- а) Тиск однаковий.
- б) Тиск в посудині А більший.
- в) Тиск в посудині В більший.

7. Чому дорівнює сила гідростатичного тиску F , що діє на плоску фігуру будь-якої форми?

- а) Гідростатичному тиску, помноженому на площу даної фігури.
- б) Гідростатичному тиску, помноженому на площу епюри гідростатичного тиску.
- в) Гідростатичному тиску в центрі тяжіння фігури, помноженому на площу змоченої поверхні даної форми.

8. Чому дорівнює горизонтальна складова сили гідростатичного тиску, що діє на криволінійну поверхню?

- а) Вазі рідини в тілі тиску.
- б) Гідростатичному тиску в центрі тяжіння, помноженому на площу криволінійної поверхні.
- в) Гідростатичному тиску в центрі тяжіння, помноженому на площу вертикальної проекції криволінійної поверхні.

9. В яких випадках тіло затоне?

- а) $G < F_A$; б) $G > F_A$; в) $G = F_A$.

10. Метацентр — це:

- а) центр тяжіння судна;
- б) перетин лінії дії архімедової сили з віссю симетрії судна;
- в) центр водотоннажності судна.

11. Визначити товщину стінки труби діаметром 100 мм, якщо робочий тиск 50 кгс/м^2 . Напруження розриву 380 МПа .

- а) 0,15 м; б) 0,035 м; в) 0,00065 м.

12. Для вимірювання падіння тиску у вентиляційній трубі використовується чашковий похилий мікроманометр, який заповнений спиртом густиною 780 кг/м^3 . Нахил трубки 30° . Визначити необхідну довжину манометричної шкали для вимірювання падіння тиску $0,001 \text{ кгс/см}^2$.

- а) 0,0256 м; б) 0,0155 м; в) 0,156 м.

3 КІНЕМАТИКА ТА ДИНАМІКА РІДИН (ГІДРОДИНАМІКА)

3.1 Завдання і методи досліджень

Гідродинаміка — це розділ гідравліки (технічної механіки рідин), де розглядаються основні закони руху рідин під дією різних сил, визначається характер руху і його вплив на параметри потоку, взаємодію останнього з нерухожими і рухомими перегородками, його боковими стінками.

В гідродинаміці відомі два методи досліджень — метод Ейлера і метод Лагранжа.

При дослідженні руху за Лагранжем розглядають поведінку частинок рідини, що переміщуються в просторі і безперервно змінюють свої координати x , y , z , t при відомих початкових координатах x_0 , y_0 і z_0 (т. зв. змінних Лагранжа):

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= z(x_0, y_0, z_0, t), \\p &= p(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Проекції швидкості частинки визначаються з умови

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t},$$

прискорення — з умови

$$a = \frac{du}{dt},$$

де $du = [(\partial u_x)^2 + (\partial u_y)^2 + (\partial u_z)^2]^{1/2}$.

Метод Ейлера дозволяє вивчати поведінку частинки рідини, що проходить через фіксовану точку простору, заповненого рідиною (нерухома система координат), в якій вимірюються швидкості і тиски протягом певного часу

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_x(x, y, z, t), \\
 u_y &= u_y(x, y, z, t), \\
 u_z &= u_z(x, y, z, t), \\
 p &= p(x, y, z, t).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Є очевидним, що метод Ейлера є більш простим і зручним для дослідження рідини, тому що дозволяє спостерігати за рухом рідини в певні моменти часу в певних точках простору.

3.2 Види руху рідин

Рух рідини може бути усталеним (стаціонарним, сталим) і неусталеним (нестационарним, змінним), рівномірним і нерівномірним, напірним і безнапірним, одно-, дво-, і тримірним, вихровим і безвихровим.

Усталений — такий рух рідини, коли його характеристики (швидкості і тиски) в окремих точках простору, через які протікає рідина, незмінні в часі і залежать тільки від її координат

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_x(x, y, z), \\
 u_y &= u_y(x, y, z), \\
 u_z &= u_z(x, y, z), \\
 p &= p(x, y, z).
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

При одномірному русі рідин, наприклад, в трубах

$$u = u(x). \tag{3.4}$$

Типові приклади усталеного руху: витікання рідини через отвір при сталому рівні, з крана — при сталому тиску, течія рідин у всмоктувальних і напірних лініях відцентрових насосів та ін.

Неусталеним називають такий рух, під час якого всі його характеристики в окремих точках простору, через які протікає рідина, змінюються з часом. При одномірному русі

$$\begin{aligned}
 u &= u(x, t), \\
 p &= p(x, t).
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Приклади такого руху: наповнення і спорожнення резервуарів, течія в трубах при швидкому відкритті чи закритті засувки, течія рідини у всмоктувальних чи напірних лініях поршневих (плунжерних, діафрагменних) насосів та ін.

Рівномірним може бути тільки усталений рух рідини, коли значення швидкості у відповідних точках будь-яких живих перерізів будуть однакові. Це течія рідин у трубах постійного діаметра, в каналах і лотках постійного профілю з однаковим нахилом дна і вільної поверхні рідин.

Рух називають нерівномірним, якщо значення швидкостей у відповідних точках живих перерізів змінюються вздовж потоку. Типові приклади: рух рідини в дифузорі — трубі, що плавно розширюється, чи в конфузіві — трубі, що плавно звужується.

Напірний рух рідин — це течія в замкнених каналах (трубах), в яких рідина повністю заповнює переріз каналу, при надлишковому тиску, що зменшується вздовж потоку на величину його втрат на тертя.

Безнапірний рух рідин — це течія у закритих потоках з вільною поверхнею рідини (при цьому тиск на вільній поверхні рідини у всіх перерізах однаковий) або течія рідин у відкритих руслах під дією сил гравітації, завдяки перепаду геометричних висот.

Рух кожної частинки рідини в загальному потоці можна розглядати як результат трьох складових руху: переносного, обертового навколо миттєвих центрів і деформаційного.

Завдяки переносному рухові центри частинок рідини переміщуються з швидкістю \vec{v}_0 з одного положення в інше (рідина тече). При цьому частинки можуть змінювати свою орієнтацію в просторі, що є наслідком її обертання зі швидкістю $\vec{v}_{об}$ і деформуватися з швидкістю \vec{v}_d , що накладає деяку кількісну характеристику на процес руху. Таким чином, результатом руху рідини є їх сумою:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{об} + \vec{v}_d.$$

Рух, під час якого частинки рідини обертаються називається вихровим. Вихровий рух буває у всіх випадках, коли є суттєва зміна швидкості в перерізі потоку. Однак введення визначення “середньої швидкості” течії потоку рідини дозволяє вважати її безвихровою. Така течія рідини називається потен-

ціальною. Надалі, при встановленні основних законів руху рідини, розглядатимемо тільки усталений і неусталений рух.

3.3 Модель елементарної струминки ідеальної рідини

Всі рідини легкотекучі і об'єми їх потоків відповідають об'ємам русел, які можуть мати найрізноманітнішу форму. В зв'язку з цим необхідно знати, як поводяться всі її частинки. Математично описати їх рух в тримірному просторі дуже важко, тому ми обмежимося розглядом найбільш простого однорідного руху рідин, що використовується всіма під час вивчення руху рідин в трубах і каналах.

Введемо поняття лінії течії, трубки течії та елементарного струменя.

Уявімо собі простір, зайнятий рухомою рідиною. Цей простір характеризується деяким полем швидкостей. Хай в даний момент часу частинка займає положення в точці 1 (рис. 3.1), швидкість характеризується вектором u_1 . В наступний момент часу частинка займе положення 2 з вектором швидкості u_2 і т.д. При зменшенні відстані між точками відстанню плавну криву (т.зв. траєкторію руху частинки), в кожній точці якої вектор швидкості буде дотичною до неї. Цю криву називають *лінією течії*.

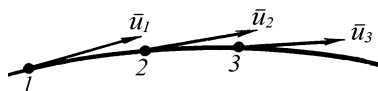


Рисунок 3.1 — Лінія течії

Проведемо в рухомій рідині невеликий замкнений контур (рис. 3.2) і через кожну його точку проведемо лінію течії.

Сукупність цих ліній утворює поверхню, яку називають трубкою течії. На поверхні цієї трубки нормальні складові

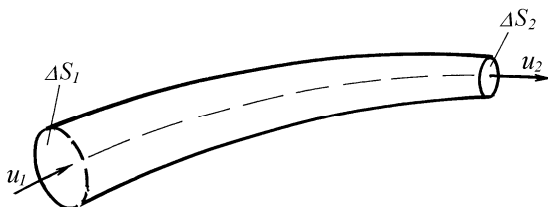


Рисунок 3.2 — Елементарна струминка

швидкості відсутні, оскільки лінії течії мають напрям швидкостей. Це вказує на неможливість проникнення частинок як ззовні, так і з внутрішньої сторони, тобто є моделлю трубки з непроникливими стінками. Якщо уявно трубку течії заповнити рідиною, що рухається, матимемо т.зв. *елементарну струминку*.

Властивості елементарної струминки:

- при усталеному русі елементарна струминка не змінює свого положення в просторі і трубку течії можна розглядати як жорстку трубку з непроникливою стінкою;
- швидкості в усіх точках кожного нормального перерізу струминки однакові (що впливає з умови малої величини самих перерізів), але під час руху від одного перерізу до іншого змінюються, що супроводжується згущенням чи розширенням лінії течії;
- кількість рідини в трубці течії між двома взятими перерізами незмінна, бо її поверхня непрониклива.

3.4 Витрата та рівняння нерозривності струминки рідини

Витратою рідини називають кількість рідини, що перетікає через нормальний переріз елементарного струменя за одиницю часу. Витрата може бути об'ємною — Q , ($\text{м}^3/\text{с}$), масовою — $Q_m = \rho Q$, ($\text{кг}/\text{с}$) і ваговою — $Q_g = \rho g Q$, ($\text{Н}/\text{м}^3$).

Нехай за час Δt крізь переріз 1-1 (рис. 3.3) перетече елементарна маса $dm_1 = \rho_1 dS_1 \cdot l_1 = \rho_1 dS_1 \cdot u_1 \Delta t$. Оскільки стінка струминки непрониклива, то очевидно, що така ж кількість рідини, але в об'ємі $dS_2 l_2$, повинна витекти

$$dm_2 = \rho_2 dS_2 \cdot l_2 = \rho_2 dS_2 \cdot u_2 \Delta t .$$

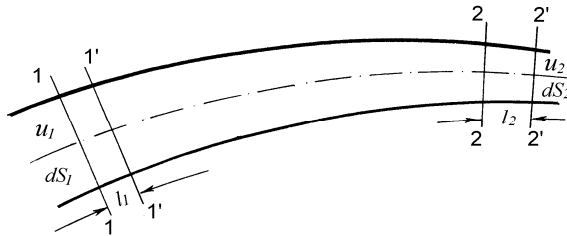


Рисунок 3.3 — Виведення рівняння нерозривності елементарної струминки рідини

Тобто $m_1 = m_2$

$$\rho_1 u_1 dS_1 = \rho_2 u_2 dS_2. \quad (3.6)$$

Для нестисливої рідини (крапельної) $\rho_1 = \rho_2$. Тоді

$$u_1 dS_1 = u_2 dS_2. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.6) і (3.7) виражають умову нерозривності елементарної струминки в розмірностях відповідно масової і об'ємної витрати. Оскільки перерізи 1-1 і 2-2 вибрані довільно, то можна в загальному вигляді записати, що елементарна витрата

$$dQ = u dS. \quad (3.8)$$

Для потоку рідини, що складається з великої кількості струменів, кожна з яких має свою швидкість течії, рівняння об'ємної витрати є простою інтегральною сумою

$$Q = \int_S u dS. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) може бути обчислена за умови, що відомий закон зміни швидкостей у перерізі потоку. Оскільки в більшості випадків цей закон невідомий, то в гідромеханіці вводиться поняття середньої швидкості руху рідини через даний живий переріз потоку.

Живим перерізом називають такий переріз потоку, в кожній точці якого вектор швидкості є нормаллю до нього.

Середня швидкість руху рідини — величина розрахункова. Якби всі елементарні струминки рухались з середньою швидкістю $v_{сер} = v$, об'ємна витрата була б рівна фактичній витраті через даний живий переріз

$$Q = \int_S u dS = v \int_S dS = v S. \quad (3.10)$$

Очевидно, що для визначення середньої швидкості необхідно знати об'ємну витрату

$$Q = \frac{V}{t}. \quad (3.11)$$

Тоді
$$v = \frac{Q}{S}. \quad (3.12)$$

Приклад 3.1. Визначити швидкість руху рідини в трубопроводі діаметром $d = 200$ мм, якщо об'ємна витрата потоку $Q = 40$ л/с.

Розв'язок: Оскільки площа перерізу труби $S = \pi d^2/4$, то

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,04}{3,14 \cdot 0,2^2} = 1,27 \text{ м/с}.$$

3.5 Диференціальне рівняння нерозривності потоку рідини

Диференціальне рівняння нерозривності базується на законі збереження маси (М. В. Ломоносов, 1742 р.).

Для його доведення виділимо уявно в довільному потоці рідини чи газу прямокутний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам з вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і ребрами dx , dy , dz (рис. 3.4).

Розглянемо зміну маси в об'ємі паралелепіпеда в напрямі осі Ox .

За час dt крізь грань 1-2-3-4 протече маса рідини

$$dm_1 = \rho(u_x dt) dy dz,$$

а через грань 5-6-7-8 витече маса

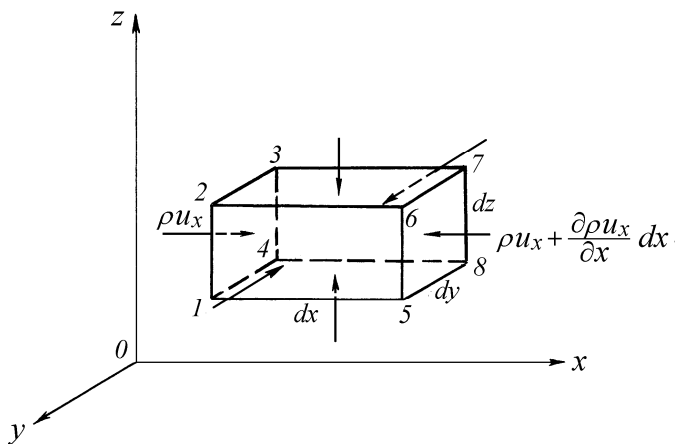


Рисунок 3.4 — Виведення рівняння нерозривності потоку рідини

$$dm_2 = \rho(u_x dt) dy dz + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx du dz dt .$$

Залишиться в паралелепіпеді маса

$$dm_x = dm_1 - dm_2 = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt .$$

Аналогічно отримуємо зміну маси при течії рідини паралельно осям Oy і Oz

$$dm_y = -\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dy dx dz dt ,$$

$$dm_z = -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dz dx dy dt .$$

Повна зміна маси дорівнює

$$\begin{aligned} dm &= dm_x + dm_y + dm_z = \\ &= -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt . \end{aligned} \quad (3.13)$$

За цей же час dt в паралелепіпеді початкова маса $m = \rho dx dy dz$ збільшилась до величини $(m + dm) = \rho dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$, і зміна маси в часі

$$m - (m + dm) = -dm \quad \text{або} \quad dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz . \quad (3.14)$$

Оскільки мова йде про один і той же об'єм паралелепіпедів 1-2-3-4-5-6-7-8, то при рівності лівих частин формул (3.13) і (3.14) повинні бути рівні і їх праві частини. В результаті бачимо, що

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] , \quad (3.15)$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 . \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16) називають основним диференціальним рівнянням нерозривності рідин.

Якщо рух ustalений, то $\partial\rho/\partial t = 0$, і рівняння (3.16) спрощується

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.17)$$

Для нестисливих рідин $\rho = const$ і рівняння (3.17) можна записати як суму часткових похідних проекцій швидкості на відповідні координатні осі

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.18)$$

Якщо помножимо всі члени рівняння на dt , то отримаємо диференціальне рівняння лінійної деформації в проекціях на відповідні осі ($du_x dt = dl_x$ і т.д.)

$$\frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z} = 0. \quad (3.19)$$

Для одномірного руху формула (3.18) спрощується

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

і для нестисливої рідини

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = const. \quad (3.21)$$

Приклад 3.2. Рідина рухається трубопроводом, що складається з двох ділянок з діаметрами $d_1 = 20$ мм і $d_2 = 40$ мм. Визначити швидкість руху рідини на другій ділянці, якщо швидкість руху рідини на першій ділянці становить $v_1 = 10$ м/с.

Розв'язок: Згідно рівняння нерозривності для нестисливої рідини

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Звідси
$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 10 \left(\frac{0,02}{0,04} \right)^2 = 2,5 \text{ м/с}.$$

3.6 Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини

Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини були вперше отримані Л. Ейлером у 1755 р. Вони пов'язують всі параметри, що характеризують течію рідини: швидкості і прискорення в різних точках простору, заповненого рідиною, і сили, що спричиняють цей рух.

Для отримання цих рівнянь виділимо нескінченно малий об'єм у формі прямокутного паралелепіпеда (рис. 3.5) і розглянемо його рух в проекціях на відповідні координатні осі $0x$, $0y$, $0z$.

Згідно з принципом д'Аламбера, якщо до сил, що діють на рідину в стані абсолютного спокою, (див. п. 2.1, рівняння (2.4)), додати сили інерції (в проекціях на відповідні осі), віднесені до одиниці маси

$$F_x = -\frac{du_x}{dt}; \quad F_y = -\frac{du_y}{dt}; \quad F_z = -\frac{du_z}{dt}, \quad (3.22)$$

(знак мінус означає тут, що сили інерції направлені протилежно силам прискорення), то отримаємо відомі рівняння Ейлера в проекціях на відповідні осі координат

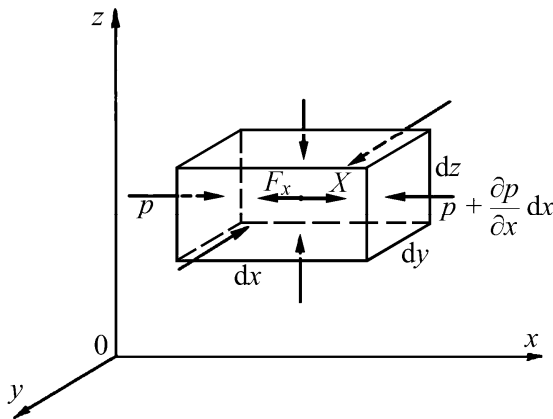


Рисунок 3.5 — Схема для виведення диференціальних рівнянь руху рідини

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{du_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{du_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Отримана система рівнянь (3.23) встановлює зв'язок між проекціями об'ємних сил X , Y , Z , сил інерції, тиском, густиною і є основними диференціальними рівняннями гідродинаміки.

3.7 Рівняння Бернуллі для струминки ідеальної нестисливої рідини

Розглянемо усталений рух ідеальної нестисливої рідини. Для отримання рівняння Д. Бернуллі використаємо систему диференціальних рівнянь руху (3.23), помноживши відповідно перше на dx , друге — на dy і третє — на dz ,

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} dx = Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx; \\ \frac{du_y}{dt} dy = Ydy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy; \\ \frac{du_z}{dt} dz = Zdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \end{cases} \quad (3.24)$$

і додамо їх почленно

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = \\ = (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Оскільки

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

то ліва частина рівняння (3.25) є повним диференціалом швидкості в квадраті, тому що

$$u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2).$$

В правій частині рівняння (3.25) вираз

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU$$

є повним диференціалом силової функції dU .

При усталеному русі тиск не змінюється з часом, і вираз

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = dp$$

є повним диференціалом тиску, тоді рівняння (3.25) запишемо спрощено у вигляді

$$\frac{1}{2} d(u^2) = dU - \frac{1}{\rho} dp$$

або після інтегрування бачимо, що

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = const, \quad (3.26)$$

тобто сума трьох його членів в будь-якій точці ідеального струменя є постійною величиною. Для двох довільних положень частинки в перерізах 1-1 і 2-2 (рис. 3.6) можна записати:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - U_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - U_2. \quad (3.27)$$

Для випадку, коли рідина рухається тільки під впливом сили тяжіння, проекції масових сил $X = Y = 0$, а $Z = -g$.

Тоді силова функція $U = -gz$ і рівняння (3.27) матиме вигляд

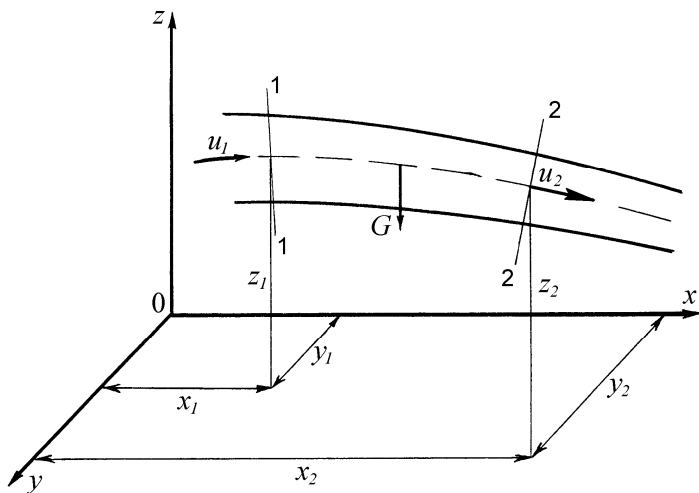


Рисунок 3.6 — Схема для виведення рівняння Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (3.28)$$

Для двох довільних перерізів 1-1 і 2-2 рівність (3.27) в розмірності питомої енергії (Дж/кг) матиме вигляд

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (3.29)$$

Якщо віднести всі члени рівняння (3.29) до одиниці ваги, поділивши всі його члени на g , отримаємо рівняння в лінійних розмірах (м)

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2. \quad (3.30)$$

В такій розмірності рівняння використовується для дослідження напірної чи безнапірної течії крапельних рідин (вода, нафта, бензин та ін.).

Рівняння (3.30) і є рівнянням Д. Бернуллі для елементарної струминки ідеальної рідини і встановлює зв'язок між швидкістю течії, тиском в даному перерізі і геометричним положен-

ням його геометричного центра у вибраній системі координат відносно площини xOy .

Вперше рівняння було отримане Д. Бернуллі в 1738 р. (Петербурзька АН) на основі застосування до рухомої рідини закону кінетичної енергії.

Якщо всі члени рівняння (3.29) помножити на густину ρ , то отримаємо його в розмірності тиску ($\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$)

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2}. \quad (3.31)$$

Приклад 3.3. Визначити тиск p_1 в перерізі 1-1 горизонтально розміщеного сопла гідромонітора (рис. 3.7), необхідний для надання воді швидкості у вихідному перерізі 2-2 $v_2 = 40$ м/с, якщо швидкість руху води в перерізі 1-1 становить $v_1 = 3$ м/с. Розподіл швидкостей в соплі вважати рівномірним. Гідрравлічні втрати не враховувати.

Розв'язок: Перерізи 1-1 і 2-2 приймаємо за розрахункові, оскільки в цих перерізах відомі швидкості і відомий надлишковий тиск в перерізі 2-2 ($p_2 = 0$, оскільки вода витікає в атмосферу). Площину порівняння проводимо вздовж осі сопла, тоді координати $z_1 = z_2 = 0$ і рівняння Бернуллі (3.30) матиме вигляд

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g},$$

звідки

$$p_1 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1000}{2} (40^2 - 3^2) = 795500 \text{ Па}.$$

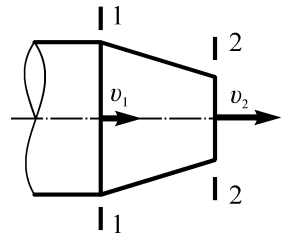


Рисунок 3.7 — Розрахунок сопла гідромонітора

3.8 Геометричний та фізичний зміст рівняння Бернуллі

Для геометричної інтерпретації членів рівняння Бернуллі звернемось до формули (3.30) і рис. 3.8, на якому зображено елементарний струмінь ідеальної рідини.

Розглянемо рух рідини між двома довільно взятими перерізами 1-1 і 2-2, центри ваги яких розміщені на висотах z_1 і z_2 відносно площини порівняння yOx (вісь Oy нормальна до рисунка). Встановимо в центрах перерізів п'єзометричні трубки,

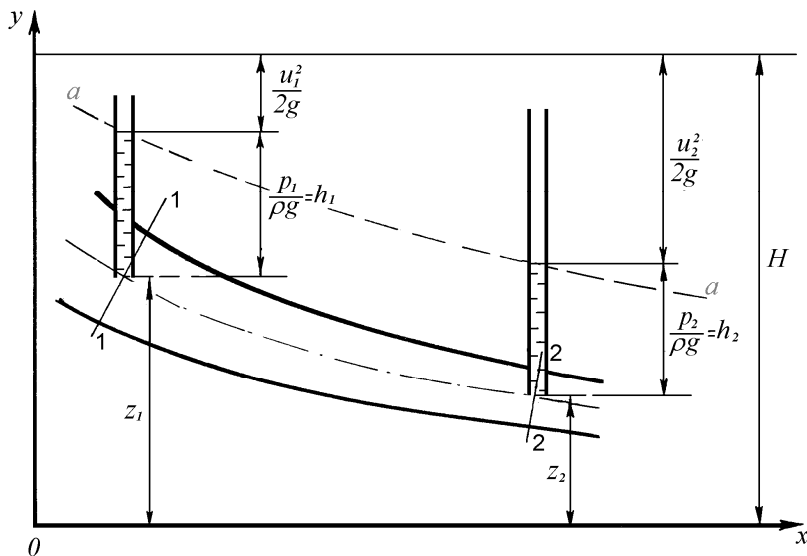


Рисунок 3.8 — Геометрична інтерпретація складових рівняння Бернуллі

рідина в яких встановиться на висотах, що відповідають тискам p_1 і p_2 .

Таким чином, з геометричної точки зору: z_1 і z_2 — геометричні (нівелірні) висоти центрів ваги вибраних перерізів відносно площини порівняння, що співпадає з віссю Ox , які називають *геометричні напори*; $p_1/\rho g$ і $p_2/\rho g$ — п'езометричні висоти в цих перерізах або *п'езометричні напори*.

Для визначення геометричного змісту третього члена рівняння Бернуллі $u^2/2g$ використаємо трубку Піто (це зігнута під кутом 90° трубка з кінцем меншого діаметра) і встановимо її проти течії на рівні п'езометра і поряд з ним, як показано на рис. 3.9. В результаті в перерізі $A-A$, де швидкість $u_a = u$, встановиться п'езометричний рівень $h_A = p_A/\rho g$, в перерізі $B-B$ — рівень $h_B = p_B/\rho g$, вищий на величину $h_u = u^2/2g$, тому що в цьому перерізі в трубці Піто швидкість течії гальмується до нуля ($u_B = 0$).

Запишемо рівняння Бернуллі для горизонтального струменя рідини на рівні заміру швидкості

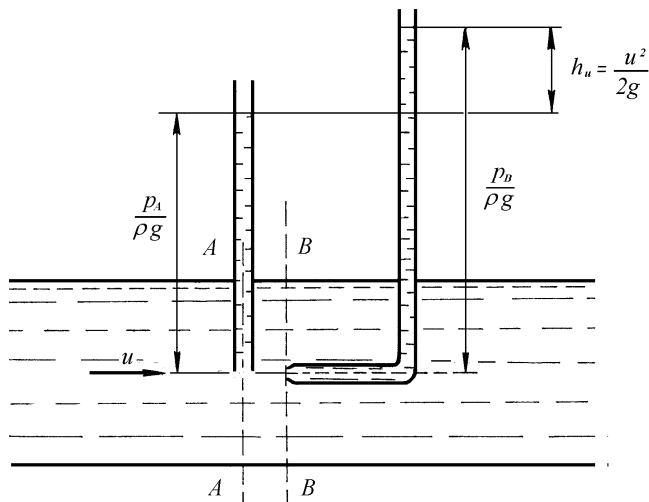


Рисунок 3.9 — Визначення швидкості руху рідини за допомогою трубки Піто

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g} \quad (3.32)$$

або

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{p_A - p_B}{\rho g} = h_B - h_A = h, \quad (3.33)$$

звідки

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (3.34)$$

В гідравліці величину h називають величиною *швидкісного напору*, а швидкість u , що відповідає величині h , (3.34), — місцевою швидкістю течії рідини.

Нанесемо в масштабі, як показано на рис. 3.8, значення геометричних напорів z_1 і z_2 , п'єзометричних напорів $p_1/\rho g$ і $p_2/\rho g$ і швидкісних напорів $u_1^2/2g$ і $u_2^2/2g$ в перерізах 1-1 і 2-2. Ми бачимо, що вершини їх суми лежать на одній горизонтальній площині, розміщеній вище площини порівняння на величину

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const. \quad (3.35)$$

В гідравліці H називають повним гідродинамічним напором. Для ідеальної рідини ця площина горизонтальна, тобто $H = \text{const}$.

Якщо через верхні рівні п'езометрів провести лінію, то отримаємо так звану лінію п'езометричного напору. На рис. 3.8 це пунктирна лінія $a-a$.

Фізичний зміст членів рівняння Д. Бернуллі зрозумілий з розмірності їх величин в рівнянні (3.29). Дж/кг — це робота, що виконується одним кілограмом рідини при русі її від перерізу 1-1 до перерізу 2-2. Будучи виконаною за одиницю часу (наприклад, 1 с), отримуємо повну питому енергію, яку має одиниця маси рідини. Оскільки повна енергія струменя складається з потенціальної

$$\delta E_n = \gamma \delta V \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = gm \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$$

і кінетичної енергії

$$\delta E_k = \frac{mu^2}{2},$$

то її питома величина для одиниці ваги рідини

$$e = \frac{\delta E_n}{gm} + \frac{\delta E_k}{gm} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \quad (3.36)$$

і має лінійну розмірність — розмірність напору. Таким чином, з фізичної точки зору повний напір — це повна питома енергія, яку має один кілограм маси рідини, що рухається через переріз. Тоді у формулі (3.36): z — питома потенціальна енергія положення рідини в довільному перерізі, $p/\rho g$ — питома потенціальна енергія тиску в даному перерізі, $u^2/2g$ — питома кінетична енергія, $(z + p/\rho g)$ — повна питома потенціальна енергія.

Фізичну суть п'езометричного напору $p/\rho g$ легко перевірити за допомогою силового циліндра (рис. 3.10). В циліндр діаметром D подається рідина під тиском p . В результаті на площу по-

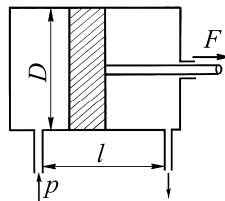


Рисунок 3.10 — Схема силового циліндра

ршня S діє сила тиску $F = pS$, яка на довжині ходу поршня l виконує роботу $A = Fl = pSl$. Знайдемо роботу одиниці ваги рідини за 1 с, і як результат, маємо величину питомої енергії тиску

$$e_p = \frac{A}{\rho g Sl} = \frac{pSl}{\rho g Sl} = \frac{p}{\rho g}.$$

Згідно з рівнянням (3.29) $e_1 = e_2 = const$, тобто для ідеальної рідини, сума трьох складових повної питомої енергії є величиною сталою по всій довжині елементарного струменя.

3.9 Рівняння Бернуллі для струминки реальної нестисливої рідини

Реальна рідина має ряд властивостей (елементарний об'єм молекул, певна структура їх розміщення, стисливість, в'язкість, температурне розширення та ін.), які не враховуються при встановленні закономірності руху ідеальної рідини і взаємозв'язку параметрів, що цей рух характеризують. В першу чергу, треба враховувати в'язкість рідини, яка обумовлює опір рухові, і втрати частини енергії рухомої струминки на тертя. Якщо в перерізі 1-1 (рис. 3.11) струминки реальної рідини її питома енергія

$$\delta e_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g},$$

то в перерізі 2-2

$$\delta e_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$$

і менша за δe_1 на величину втрат

$$h_{1-2} = \delta e_1 - \delta e_2; \quad H_1 - H_2 = h_{1-2},$$

або

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (3.37)$$

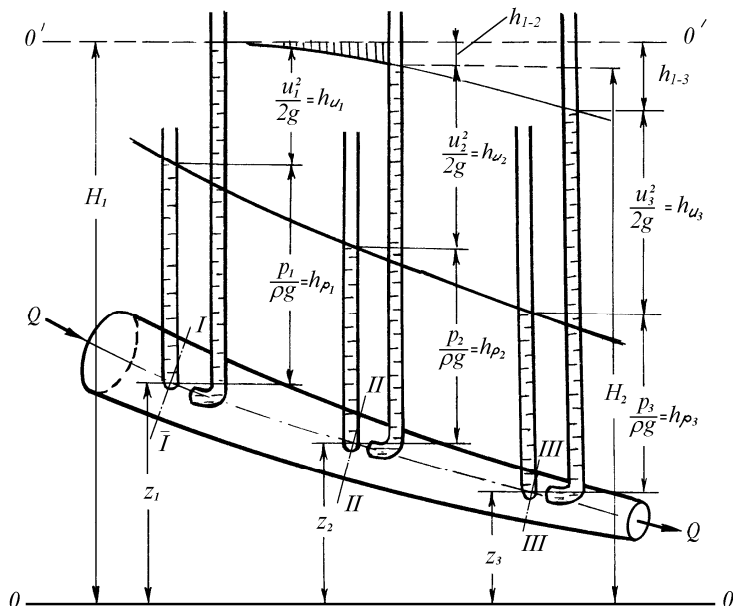


Рисунок 3.11 — Виведення рівняння Бернуллі для струминки реальної рідини

Рівність (3.37) і є рівнянням Д. Бернуллі для струминки реальної в'язкої нестисливої рідини.

На рис. 3.11 показано, що повний гідродинамічний напір вздовж потоку падає ($H_1 > H_2 > \dots > H_i = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{u_i^2}{2g}$) на величину $h_{1-2} = h_{тер} + h_{м.о.}$, тобто на величину втрат напіру на тертя по довжині труби і в місцевих опорах. Більш детально питання втрат напіру буде розглянуто далі, в розділах 4, 5.

Нахил лінії повного гідродинамічного напіру в сторону течії рідини (в результаті втрат його на тертя) називають *гідрравлічним нахилом*. Гідрравлічний нахил — це безрозмірна величина, що визначається відношенням різниці повних гідродинамічних напорів H_1 і H_2 до горизонтальної відстані l_{1-2} між вибраними перерізами, наприклад, 1-1 і 2-2 (див. рис. 3.11)

$$i = \frac{H_1 - H_2}{l_{1-2}} = \frac{h_{1-2}}{l}. \quad (3.38)$$

Оскільки різниця $(H_1 - H_2)$ дорівнює втратам напору на тертя, то гідравлічний нахил, з іншого боку, — це є втрати напору на одиницю довжини потоку.

Зниження потенціальної енергії на одиницю довжини потоку називають *п'єзометричним нахилом*. Величина його може бути визначена за формулою

$$i_p = \frac{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)}{l_{1-2}}. \quad (3.39)$$

Відношення перепаду висот центрів вибраних перерізів до відстані горизонтальної відстані між ними l_{1-2} називають *геометричним нахилом*.

$$i_0 = \frac{z_1 - z_2}{l_{1-2}}. \quad (3.40)$$

Оскільки втрати напору виникають внаслідок дії сил в'язкого тертя, то гідравлічний нахил мають тільки в'язкі рідини. Він завжди нахилений в сторону руху, тому що втрати енергії постійно зростають. У струминці (чи потоці) постійного перерізу це — похила пряма лінія (рис. 3.12). У зв'язку з тим, що при $d = const$, $u_1 = u_2$, лінія гідравлічного нахилу роз-

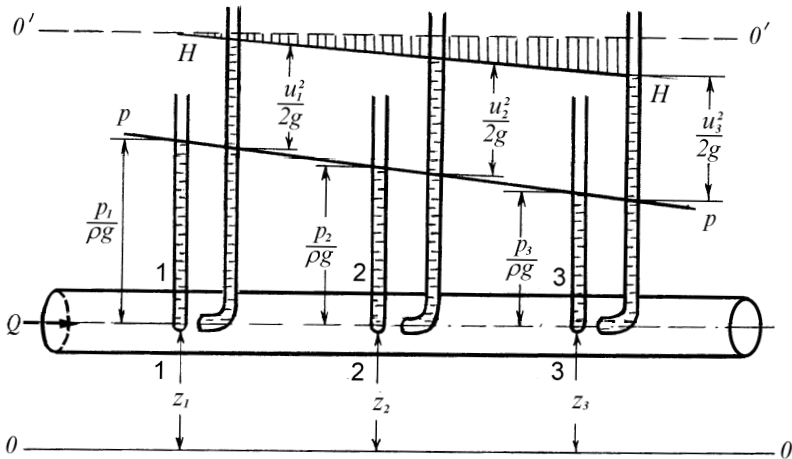


Рисунок 3.12 — Визначення гідравлічного нахилу

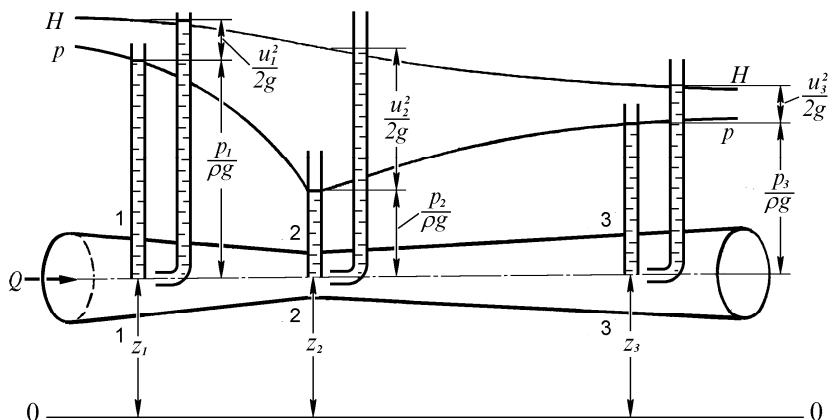


Рисунок 3.13 — Визначення п'єзометричного нахилу

міщена вище від лінії п'єзометричного нахилу на величину $u^2/2g$ і паралельна їй, тобто $i = i_p$. Для струминки в'язкої рідини лінія п'єзометричного нахилу залежить від зміни живих перерізів по довжині. При розширенні потоку потенціальна енергія рідини зростатиме внаслідок переходу частини кінетичної енергії $u^2/2g$ в потенціальну енергію тиску $p/\rho g$. І при значному розширенні перерізу струменя лінія п'єзометричного нахилу може мати нахил проти течії (рис. 3.13, лінія p між перерізами 2-2 і 3-3).

3.10 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

Потік реальної в'язкої рідини складається з нескінченної кількості елементарних струминок, кожна з яких характеризується своєю швидкістю течії. Без знання закону зміни швидкостей в живому перерізі потоку рідини просте інтегрування їх витрат неможливе, тому вводять поняття середньої розрахункової швидкості і використовують рівняння для елементарної струминки в'язкої рідини

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (3.41)$$

Для вагової витрати елементарної струминки $\gamma dQ = \rho g dQ$ повна її енергія в перерізах 1-1 і 2-2 (рис. 3.14) буде дорівнювати

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \rho g dQ = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \rho g dQ + h_{1-2} \rho g dQ \quad (3.42)$$

Для потоку рідини

$$\int_{s_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \rho g dQ = \int_{s_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \rho g dQ + \int_{s_2} h_{1-2} \rho g dQ. \quad (3.43)$$

Для кожної елементарної струминки потоку сума питомих потенціальних енергій положення (z) і тиску ($p/\rho g$) є величина стала і її можна винести за знак інтеграла. Тоді

$$\rho g \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \int_s u dS = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q. \quad (3.44)$$

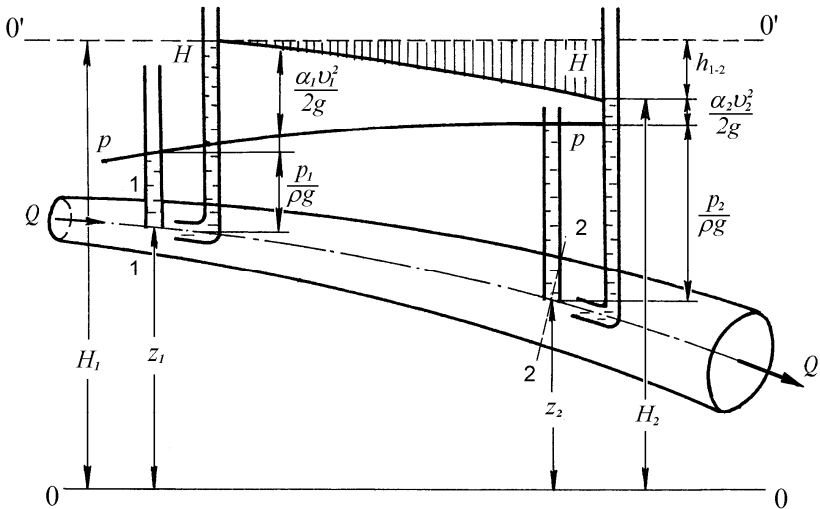


Рисунок 3.14 — Схема для виведення рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини

При використанні поняття середньої швидкості потоку можна вести мову лише про середні втрати напору (енергії) між перерізами 1-1 і 2-2

$$\int_{S_2} h_{1-2} \rho g dQ = h_{1-2} \rho g \int_{S_2} u dS_2 = h_{1-2} \rho g Q. \quad (3.45)$$

Розглянемо інтеграл, що враховує дійсну кінетичну енергію потоку рідини.

Враховуючи, що $dQ = u dS$,

$$K_{\text{д}} = \int_S \frac{u^2}{2g} \rho g dQ = \int_S \frac{u^2}{2g} \rho g u dS. \quad (3.46)$$

В гідравліці для розв'язку інтеграла (3.46) використовують припущення, що швидкості в різних точках живого перерізу сталі і рівні середньому її значенню v . Тоді можна підрахувати величину умовної кінетичної енергії

$$K_{\text{в}} = \int_S \frac{v^2}{2g} \rho g v dS = \frac{v^2}{2g} \rho g Q. \quad (3.47)$$

Розділивши вираз для дійсного закону розподілу енергії (3.46) в живому перерізі потоку рідини на її умовне значення (3.47)

$$\frac{K_{\text{д}}}{K_{\text{в}}} = \frac{\int_S \frac{u^2}{2g} \rho g u dS}{\frac{v^2}{2g} \rho g (vS)} = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S} = \alpha, \quad (3.48)$$

отримаємо коефіцієнт Коріоліса α , так званий коефіцієнт нерівномірності розподілу швидкостей в живому перерізі потоку рідини. Коефіцієнт α визначається дослідями шляхом заміру місцевих швидкостей у різних точках перерізу. Для усталених плавномізмних течій рідини в каналах і трубах при турбулентному режимі середнє його значення змінюється в межах 1,03...1,1 і при розрахунках, як правило, приймається $\alpha = 1$. При ламінарному режимі руху рідин у круглих трубах — це стала величина $\alpha = 2$.

З врахуванням коефіцієнта α переписемо відношення (3.48) у такому вигляді

$$\int_s \frac{u^2}{2g} \rho g (u dS) = \alpha \frac{v^2}{2g} \rho g (vS). \quad (3.49)$$

Підставимо рівності (3.44) і (3.49) в рівняння (3.43) і поділивши всі його члени на $\rho g Q$, отримаємо рівняння Д. Бернуллі для одиниці ваги потоку реальної в'язкої рідини

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}. \quad (3.50)$$

Отже, рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини за своєю структурою аналогічне рівнянню Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини, в якому місцеві швидкості в виділених перерізах замінені їх середніми значеннями, а їх відхилення враховуються коефіцієнтами α_1 і α_2 .

Приклад 3.4. Визначити витрату води і побудувати п'езометричну лінію вздовж труби, яка сполучає резервуари (рис. 3.15), якщо $d_1 = 100$ мм, $d_2 = 75$ мм, $d_3 = 50$ мм, $H_1 = 4,5$ м, $H_2 = 2$ м. Втрати напору в місцевих опорах при вході в трубу $h_1 = 0,1$ м вод.ст., в першому звуженні $h_2 = 0,1$ м вод.ст., у другому звуженні $h_3 = 0,5$ м вод.ст. Втрати напору на тертя знехтувати.

Розв'язок: Швидкість виходу води з труби в другий резервуар визначається із рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 0-0 та 3-3 відносно площини порівняння 0'-0'.

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g} + h_{0-3}.$$

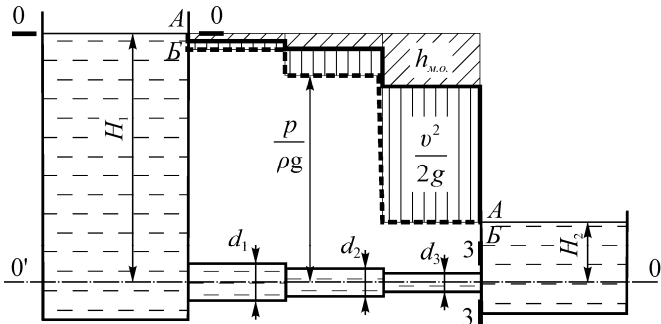


Рисунок 3.15 — Побудова п'езометричної лінії

При $z_0 = H_1$, $p_0 = p_{атм}$, $v_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_3 = 1$
 $z_3 = 0$, $p_3 = \rho g H_2 + p_{атм}$ і $h_{0-3} = h_1 + h_2 + h_3$,
 рівняння Бернуллі набуде такого вигляду:

$$H_1 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм} + \rho g H_2}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} + h_{0-3},$$

звідки $\frac{v_3^2}{2g} = H_1 - H_2 - h_{0-3} = 4,5 - 2,0 - 0,7 = 1,8$ м вод. ст.

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,8} = 5,94 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Витрата води $Q = \frac{\pi d_3^2}{4} v_3 = \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} 5,94 = 0,0116 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$

Для побудови п'єзометричної лінії обчислимо ще середні швидкості і швидкісні напори на ділянках 1 і 2:

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{0,0116 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,1^2} = 1,48 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1,48^2}{2 \cdot 9,81} = 0,11 \text{ м};$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{0,0116 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,075^2} = 2,64 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \frac{v_2^2}{2g} = \frac{2,64^2}{2 \cdot 9,81} = 0,35 \text{ м};$$

Внаслідок наявності втрат напору в місцевих опорах напірна лінія є ламаною лінією *A-A* (див. рис. 3.15).

П'єзометричний напір (лінія *B-B* на рисунку 3.15) для кожної ділянки знаходять як різницю

$$\frac{p_i}{\rho g} = H_0 - \left(\frac{v^2}{2g} + h \right),$$

де h — втрати напору до перерізу з риском p_i .

Приклад 3.5. Визначити вакуум у верхній точці сифона діаметром 150 мм (рис 3.16) та знайти витрату води, якщо $H_1 = 3,3$ м, $H_2 = 1,5$ м, $z = 6,8$ м. Втрати напору при вході рідини з резервуару в трубу становлять 0,6 м вод. ст. Втратами напору на тертя знехтувати. Побудувати п'єзометричну лінію.

Розв'язок: Швидкість виходу води з труби в резервуар визначається на основі рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 0-0 та 2-2 (площина порівняння 0'-0')

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{0-2}.$$

При $z_0 = H_1$, $p_0 = p_{атм}$, $v_0 = 0$,
 $z_2 = 0$, $p_2 = p_{атм} + \rho g H_2$ і $h_{0-2} = 0,6$ м, $\alpha_2 = 1$

Тоді

$$p_{\text{вак}} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,3 = 51993 \text{ Па} .$$

П'єзометрична лінія Б-Б зображена пунктиром на рис. 3.16.

3.11 Приклади застосування рівняння Бернуллі на практиці

Рівняння Бернуллі широко використовується для розрахунків в інженерній практиці. Гідравлічний розрахунок магістральних і місцевих нафтогазопроводів, водопроводів, масло- і продуктопроводів найрізноманітнішого призначення, всіх комунальних мереж (газу, води, тепла, та ін.) може бути виконаний тільки шляхом використання цього рівняння.

Розрахунок режимів роботи насосних і турбінних установок систем гідравлічного приводу виконується з використанням рівняння Бернуллі.

Дросельні витратоміри всіх типів і конструкцій, насоси немеханічної дії (ежектори, гідравлічні тарани, ерліфти) розраховуються з використанням рівняння Бернуллі. Тобто, де є напірні чи безнапірні потоки і рух рідин, інженерні задачі розв'язують з використанням рівняння Бернуллі. Нижче подано приклади його застосування в інженерній практиці.

3.11.1 Визначення витрати рідини

Витрату рідини можна визначити за допомогою витратоміра Вентурі (див. приклад 3.6)

Приклад 3.6. Диференціальний ртутний манометр приєднаний до установленої горизонтально витратомірної труби (рис. 3.17), показує різницю рівнів $\Delta h = 800$ мм рт.ст. ($\rho_{\text{рт}} = 13600$ кг/м³). Нехтуючи втратами напору визначити теоретичну витрату води ($\rho = 1000$ кг/м³), якщо діаметр витратомірної труби $d_1 = 250$ мм, $d_2 = 100$ мм.

Розв'язок: Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 витратоміра

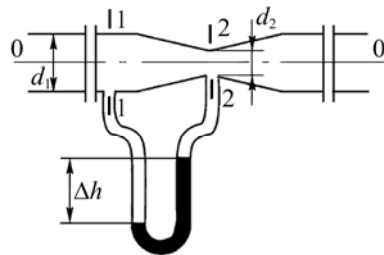


Рисунок 3.17 — Розрахунок витрати рідини

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{1-2} .$$

Рівняння постійності витрати в витратомірній трубі

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

звідки

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} = \frac{v_1 d_1^2}{d_2^2}.$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0; \quad h_{1-2} = 0.$$

Різниця п'езометричних напорів у перерізах 1-1 і 2-2, яку показує диференціальний манометр, виражена в метрах водяного стовпчика

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right).$$

Тоді швидкість течії рідини у перерізі 1-1 витратомірної трубки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{d_1^4/d_2^4 - 1}}.$$

Покази диференціального манометра, переведені в метри водяного стовпчика:

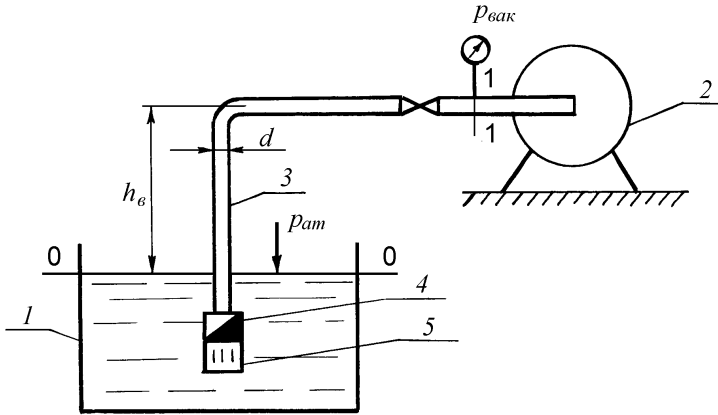
$$\begin{aligned} H &= \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{(\rho_{pm} - \rho)g\Delta h}{\rho g} = \frac{(\rho_{pm} - \rho)\Delta h}{\rho} = \\ &= 0,8 \frac{(13600 - 1000)}{1000} = 10,1 \text{ м вод.ст.} \end{aligned}$$

Теоретична витрата рідини рівна

$$\begin{aligned} Q &= S_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{d_1^4/d_2^4 - 1}} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 0,25^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 10,1}{0,25^4/0,1^4 - 1}} = 0,112 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}. \end{aligned}$$

3.11.2 Розрахунок висоти всмоктування відцентрового насоса

Схема всмоктувальної лінії відцентрового насоса зображена на рис. 3.18. Із резервуара (колодязя, водоймища) 1 рідина відкачується насосом 2 по трубі 3 діаметром d і довжиною l . На початку лінії всмоктування є сітка-фільтр 5 і зворотний клапан 4. На вході в насос є засува і вакуумметр, тобто відома величина вакууму. Характерні перерізи 0-0 (рівень рідини в резервуарі) і 1-1 — вхід рідини в насос, вертикальна віддаль між якими $h_{\text{в}}$, і є невідома висота всмоктування. Сумістивши площину порівняння з перерізом 0-0, маємо



1 — резервуар; 2 — насос; 3 — всмоктувальна лінія;
4 — зворотний клапан; 5 — сітка-фільтр

Рисунок 3.18 — Схема для визначення висоти всмоктування відцентрового насоса

Переріз 0-0

$$z_0 = 0$$

$$p_0 = p_{atm}$$

$$v_0 = 0 \text{ (тому що } S_0 \gg S_1 \text{)}$$

Переріз 1-1

$$z_1 = h_s$$

$$p_1 = p_{atm} - p_{vac}$$

$$v_1 = v = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Втрати напору $h_{0-1} = h_{тер} + h_{м.о.}$

Тоді з рівняння Бернуллі

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + h_{тер} + h_{м.о.},$$

після підстановки значень його членів і деяких перетворень (p_{atm} скорочується, $\alpha_1 = 1$) вираховуємо величину h_s

$$h_s = \frac{p_{vac}}{\rho g} - \frac{v_1^2}{2g} - h_{тер} - h_{м.о.} \quad (3.63)$$

З формули (3.63) видно, що висота всмоктування насоса h_s суттєво залежить від довжини всмоктувальної лінії (ідеальний випадок $l = h_s$) і її діаметра (чим більший діаметр, тим менші втрати напору по довжині за рахунок тертя).

Приклад 3.7. Відцентровий насос продуктивністю $20 \text{ м}^3/\text{год}$ установлений на $5,5 \text{ м}$ вище рівня води в колодязі (див. рис. 3.18). Визначити розрідження на всмоктувальній лінії насоса діаметром 100 мм , якщо загальні втрати напору рівні $0,25 \text{ м вод.ст.}$

Розв'язок: Швидкість води у всмоктувальній трубці

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{20 \cdot 4}{3600 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2} = 0,706 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Розрідження у всмоктувальному патрубку насоса визначається із рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 0-0 і 1-1

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + h_{0-1}.$$

При $z_0 = 0$;

$$p_0 = p_{\text{атм}}; \quad v_0 = 0;$$

$$z_1 = h_{\text{вс}} = 5,5 \text{ м}; \quad p_1 = p_{\text{атм}} - p_{\text{вак}}; \quad v_1 = v; \quad h_{0-1} = 0,25 \text{ м}.$$

рівняння Бернуллі набуде такого вигляду:

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = h_{\text{вс}} + \frac{v^2}{2g} + h_{0-1}.$$

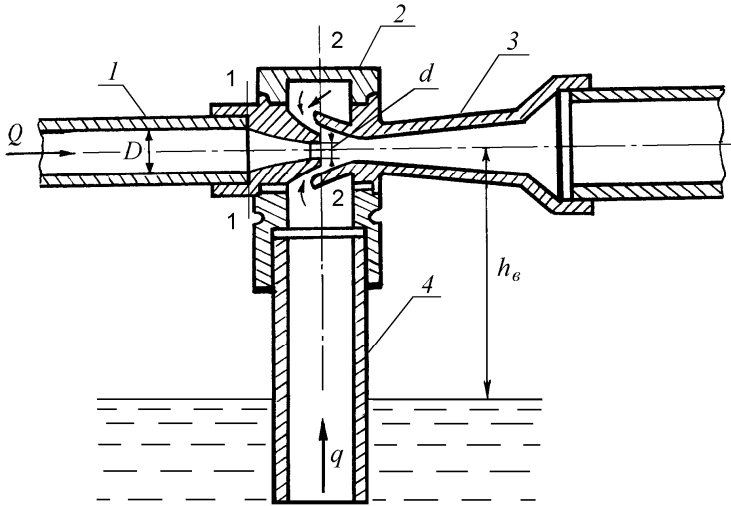
Звідси

$$\begin{aligned} p_{\text{вак}} &= \rho g \left(h_{\text{вс}} + \frac{v^2}{2g} + h_{0-1} \right) = \\ &= 1000 \cdot 9,81 \left(5,5 + \frac{0,706^2}{2 \cdot 9,81} + 0,25 \right) = 56,7 \text{ кПа}. \end{aligned}$$

3.11.3 Визначення величини вакууму ежекторної установки

Ежекторна установка (рис. 3.19) призначена для підйому рідини із живильного резервуара і змішування її з основним потоком. Якщо основний потік газ (повітря), то може бути його зрошення рідиною.

Ежектор складається із камери змішування 2, яка з'єднана з двома трубами: входною 1, що закінчується конфузorzом, і вихідною 3, також з конфузorzом на початку. Від низу камери всмоктувальна труба 4 опущена в резервуар з рідиною. По трубці 1 діаметром D подається робоча рідина з витратою Q . У звуженій її частині з діаметром d різко росте швидкість течії, внаслідок чого тиск в камері 2 стає меншим від атмосферного. В результаті, тут створюється вакуум і рідина по всмоктува-



1 — вхідна труба; 2 — камера змішування;
3 — вихідна труба; 4 — всмоктувальна труба

Рисунок 3.19 — Схема ежекторної установки

льній трубі з витратою q піднімається в камеру 2, змішуючись з робочою рідиною, і далі подається в трубу 3.

Максимальна висота h_e , на яку може піднятися рідина із живильного резервуару по всмоктувальній трубі 4, якщо ми знехтуємо втратами напору при русі рідини по цій трубі, буде визначатись величиною, розрідження в камері змішування:

$$h_e = \frac{P_{\text{вак}}}{\rho g} . \quad (3.64)$$

Цю величину знайдемо із рівняння Бернуллі, записаному для перерізів розміщених на початку і на кінці конфузора вхідної труби 1. Параметри потоку в перерізах будуть такі:

Переріз 1-1

$$z_1 = 0$$

$$p_{1(\text{абс.})} = p_{\text{атм}} + p_{\text{ман}}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

Переріз 2-2

$$z_2 = 0$$

$$p_{2(\text{абс.})} = p_{\text{атм}} - p_{\text{вак}}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Втрати напору $h_{1-2} = h_{m0}$

Тоді рівняння Бернуллі (3.50) набуде вигляду

$$\frac{p_{атм} + p_{ман}}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{атм} - p_{вак}}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{мо}. \quad (3.65)$$

Вважаючи, що режим руху в ежекторі турбулентний ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) і врахувавши рівняння витрати

$$Q = v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4},$$

виключимо з рівняння (3.64) швидкості v_1 і v_2 та виразимо величину $h_е$

$$h_е = \frac{p_{вак}}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + h_{мо} - \frac{p_{ман}}{\rho g}$$

або

$$h_е = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) + h_{мо} - \frac{p_{ман}}{\rho g}. \quad (3.66)$$

3.11.4 Розрахунок необхідного тиску на викидній лінії насоса

На викидній лінії відцентрового насоса 1 (рис. 3.20) після дифузора 2 встановлений манометр 3 (переріз 2-2), зворотний клапан 4, засувка 5. По напірній лінії діаметром d і довжиною l рідина подається в резервуар 6 на висоту h_n з витратою Q . Місцеві опори: зворотний клапан, засува, стандартний поворот на 90° , раптове розширення на вході в резервуар.

В характерних перерізах

Переріз 2-2

$$z_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$p_{2(надл.)} = p_{нас}$$

Переріз 3-3

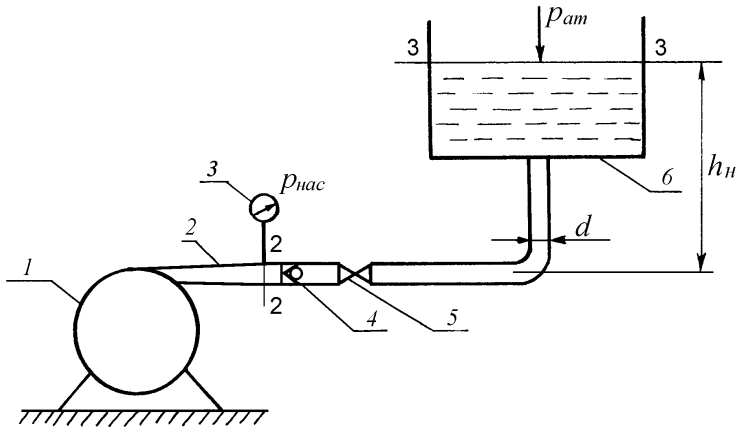
$$z_3 = h_n$$

$$u_3 = 0 \text{ (тому що } S_3 \gg S_2)$$

$$p_{3(надл.)} = 0$$

Втрати напору $h_{2-3} = h_{тер} + h_{мо}$

Приймаючи значення $\alpha_2 = 1$, запишемо рівняння Бернуллі (3.50) відносно $p_{нас}/\rho g$



1 — насос; 2 — дифузор насоса; 3 — манометр;
4 — зворотний клапан; 5 — засувка; 6 — резервуар

Рисунок 3.20 — Схема для розрахунку тиску у викидній лінії насоса

$$\frac{p_{нас}}{\rho g} = h_n + \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} + h_{мер} + h_{мо}$$

або

$$p_{нас} = \rho \frac{8Q^2}{\pi^2 d^4} + \rho g (h_n + h_{мер} + h_{мо}). \quad (3.67)$$

3.12 Рівняння кількості руху для потоку рідини

Рівняння кількості руху похідне від відомого 2-го закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3.68)$$

де \vec{F} — векторна сума всіх зовнішніх сил, що діють на потік рідини (сил тиску, тертя, тяжіння та ін.);

m — маса рідини; $a = dv/dt$ — прискорення.

Для рідин і газів найкраще записувати формулу (3.68) у іншому вигляді, запропонованому Л. Ейлером: через імпульс

суми зовнішніх сил ($\vec{F} dt$) і зміну кількості руху ($m d\vec{v}$), які визначаються для виділеного контрольного об'єму рідини:

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}. \quad (3.69)$$

Для розв'язку задач це рівняння записують в проекціях на координатні осі або відповідний напрям.

У випадку одномірного руху рідини маса рідини пов'язана з об'ємною витратою Q , що протікає через контрольний об'єм за час dt співвідношенням — $m = \rho Q dt$. З врахуванням цього рівняння кількості руху набуває такого вигляду:

$$\vec{F} = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (3.70)$$

Використаємо рівняння кількості руху (3.70) для знаходження сили дії потоку рідини на коліно із заокругленням (рис. 3.21). Ця сила буде протилежна за напрямом і рівна за величиною силі реакції стінки на дію потоку ($\vec{F}_{pi0} = -\vec{R}$).

Запишемо рівняння (3.70) в проекції на вісь Ox , яка ділить кут α пополам, для контрольного об'єму рідини, що знаходиться між перерізами 1-1 і 2-2. Якщо знехтувати силами тертя, то на цей об'єм будуть діяти сили тиску в перерізах 1-1 і 2-2, та сила реакції стінки R . В цьому випадку рівняння кількості руху в проекції на вісь Ox матиме вигляд:

$$p_1 S_1 \sin \frac{\alpha}{2} + p_2 S_2 \sin \frac{\alpha}{2} - R = \rho Q \left(-v_2 \sin \frac{\alpha}{2} - v_1 \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (3.71)$$

У трубопроводі сталого перерізу ($S_1 = S_2 = S$) для крапельних рідин ($\rho = const$) $v_1 = v_2 = v$, а тиски $p_1 \approx p_2 = p$. Тоді, врахувавши, що $Q = vS$, величина сили дії потоку рідини на коліно буде рівна

$$F_{pi0} = R = 2pS \sin \frac{\alpha}{2} + \rho v S \cdot 2v \sin \frac{\alpha}{2} = 2(p + \rho v^2) S \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.72)$$

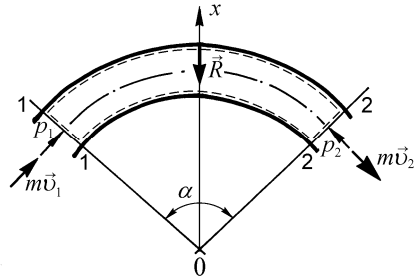


Рисунок 3.21 — Визначення сили дії рідини на коліно із заокругленням

Оскільки в більшості випадків другий доданок (ρv^2) у формулі (7.32) значно менший за тиск p , то ним можна знехтувати, і тоді сила дії потоку на поворот

$$F_{\text{від}} = 2pS \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.73)$$

Це свідчить про те, що товщина стінки труби на повороті повинна бути завжди більшою від товщини її стінки на прямих ділянках.

Якщо застосувати рівняння кількості руху для прямолінійної ділянки трубопроводу, то легко показати, що для усталеного рівномірного руху різниця сил тиску в початковому і кінцевому перерізах трубопроводу $F = (p_1 - p_2)S$ урівноважується силою тертя на цій ділянці $T = \tau \pi d l$. Тобто

$$(p_1 - p_2)S = \tau \pi d l, \quad (3.74)$$

де τ — напруження тертя на одиницю площі;

$\pi d = \chi$ — змочений периметр;

$\pi d l$ — площа бокової внутрішньої поверхні труби довжиною l ;

$S = \pi d^2 / 4$ — площа нормального перерізу труби.

Тоді втрати напору на тертя вздовж горизонтального трубопроводу

$$h_{\text{мер}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\tau}{\rho g} \frac{\chi}{S} l. \quad (3.75)$$

Враховавши, що відношення $\frac{S}{\chi} = R_2$ визначає величину гідралічного радіуса потоку R_2 (наприклад, для круглої труби $R_2 = d/4$), отримаємо зв'язок втрат напору на тертя τ із значенням R_2 .

$$\tau = \rho g R_2 \frac{h_{\text{мер}}}{l} = \rho g R_2 i, \quad (3.76)$$

де i — гідралічний нахил.

Рівняння (3.76) є основним рівнянням рівномірного руху рідини.

3.13 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Що називають лінією течії?
- 2) Чи може рідина протікати через бічну поверхню трубки течії?
- 3) Що розуміють під “живим” перерізом потоку рідини?
- 4) Чим відрізняється рівняння Бернуллі для струминки ідеальної рідини від рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини?
- 5) Як визначити гідравлічний нахил потоку рідини?
- 6) Як визначити середню швидкість потоку?
- 7) Який геометричний та фізичний зміст рівняння Бернуллі?
- 8) Який принцип роботи трубки Піто?
- 9) Що характеризує коефіцієнт Коріоліса?
- 10) Який пристрій може використовуватись для визначення витрати рідини?
- 11) Які параметри впливають на висоту всмоктування відцентрового насоса?

Контрольні тестові завдання

1. Як знаходять середню швидкість потоку?
 - а) $v = \frac{V}{S}$; б) $v = \frac{G}{S}$; в) $v = \frac{Q}{S}$.
2. Третя складова рівняння Бернуллі (швидкісний напір) — це:
 - а) питома кінетична енергія, тобто міра кінетичної енергії, що належить одиниці ваги рідини;
 - б) питома кінетична енергія, тобто міра кінетичної енергії, що належить певній вазі рідини.
3. Кожна складова рівняння Бернуллі має розмірність
 - а) тиску; б) швидкості; в) довжини.
4. Перші дві складові рівняння Бернуллі $z + \frac{p}{\rho g}$ — це:
 - а) питома потенціальна енергія, що є мірою потенціальної енергії, яка належить одиниці ваги рідини;
 - б) потужність потоку в даному перерізі.
5. Повний напір рідини $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$. З геометричної точки зору це:
 - а) положення напірної лінії над площиною порівняння;
 - б) положення п'єзометричної лінії над площиною порівняння.
6. Для якого випадку рівняння Бернуллі має вигляд:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} ?$$

- а) для струминки реальної рідини;
 б) для струминки ідеальної рідини;
 в) для потоку реальної рідини.
7. Що означає поняття «питома енергія рідини в перерізі потоку»?
 а) це напір потоку в даному перерізі;
 б) це потужність потоку в даному перерізі;
 в) це питома енергія потоку, підрахована відносно площини порівняння.
8. На чому основана дія витратомірних пристроїв?
 а) на зміні питомої кінетичної енергії;
 б) на зміні потенціальної енергії тиску;
 в) на зміні енергії тиску внаслідок зростання кінетичної енергії при зменшенні перерізу потоку.
9. Чи впливає на покази швидкостей трубки густина рідини?
 а) так; б) ні; в) це залежить від конструкції трубки.
10. Діафрагма — це пластинка з отвором в центрі, що встановлюється в трубопроводі для вимірювання в рідині
 а) швидкості; б) прискорення; в) витрати
11. Рівняння повної потенціальної енергії в живому перерізі потоку, віднесеної до одиниці маси має вигляд:
 а) $z + \frac{p}{\rho g}$; б) z ; в) $gz + \frac{p}{\rho}$.
12. Що відбувається з питомою кінетичною енергією, якщо площа живого перерізу збільшується?
 а) збільшується; б) зменшується; в) залишається без змін.

4 РЕЖИМИ ТЕЧІЇ РІДИНИ І ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ

4.1 Режими течії рідини

На характер зміни течії рідин вказували ще Хаген (1838 р.), Вейсбах (1842 р.) і Д. І. Менделєєв (1875 р.), але тільки в 1883 р. англійський фізик Осборн Рейнольдс підтвердив наявність двох режимів течії рідини на основі простих і наочних дослідів.

О. Рейнольдс виконав свої дослідження на установці, принципова схема якої використовується до цього часу для демонстрації режимів руху (рис. 4.1).

До бака 1 приєднана горизонтальна скляна труба 2 з краном 3. Над баком встановлена колба 4 з кольоровою рідиною, яка може подаватися в потік 2 по тонкій трубці 5.

Перед виконанням дослідів бак заповнюють водою з водопроводу через трубу 6, її рівень підтримують постійним за допомогою зливної лінії 7. Відкриваючи кран 3, в трубці 2 створюють потік рідини. Після його стабілізації краном 8 на трубці 5 регулюють подачу в потік тонкої струминки кольорової рідини.

Поступово, все більше відкриваючи кран 3, збільшують витрату, і як наслідок — швидкість течії рідини в трубці 2. При цьому спостерігається така картина: при невеликих швидкостях течії в трубці 2 підфарбована рідина рухається у вигляді чітко вираженої тонкої струминки (рис. 4.2, а), не перемішуючись з потоком води. При збільшенні швидкості течії кольорова рідина рухається у вигляді хвилі. Із збільшенням швидкості на окремих її ділянках починають з'являтися розриви і згодом втрачається чітка форма хвилі. При певному

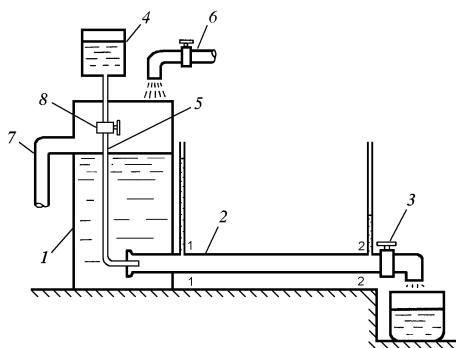


Рисунок 4.1 — Схема установки для демонстрації режимів течії

значенні швидкості струминка повністю руйнується, розмиваючись рідиною (рис. 4.2, б) і зафарбовуючи потік повністю.

Рух рідини при малих швидкостях, коли окремі струминки рідини рухаються паралельно осі потоку, був названий ламінарним (від латинського слова “lamina” — шар). Таким чином, рух можна розглядати як течію окремих паралельних шарів рідини, без перемішування і розриву як їх, так і окремих частинок рідини.

Ламінарний рух спостерігається при течії в'язких рідин (нафти, бітуму, мазуту і т.д.), а також малов'язких рідин (вода, бензин, газ і т.д.) в тонких капілярах і щілинах, в пористому середовищі (наприклад, через пісок).

Другий вид руху рідини, що спостерігається при збільшенні швидкостей, був названий турбулентним (від латинського слова “turbulentus” — вихороподібний, хаотичний).

В цьому випадку в русі рідини немає певної закономірності. Окремі частинки перемішуються між собою і рухаються по змінних траєкторіях.

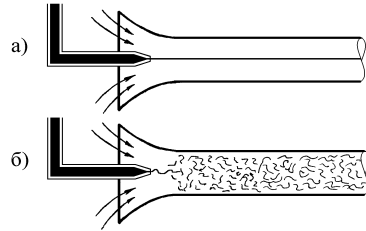
В інженерній практиці частіше маємо справу з турбулентним режимом руху рідини, який властивий для нафтопроводів (особливо, магістральних), водопроводів, теплових мереж та ін.

4.1.1 Число Рейнольдса та критична швидкість течії рідини

На основі аналізу результатів досліджень і аналізу розмірності О. Рейнольдс запропонував безрозмірний критерій

$$\text{Re} = \frac{v d}{\nu}, \quad (4.1)$$

де v — середня швидкість течії рідини; d — внутрішній діаметр труби; ν — кінематична в'язкість.



а) тонка струминка не перемішується з потоком води; б) струминка повністю руйнується, розмиваючись водою

Рисунок 4.2 — Характер течії рідини

Цей критерій характеризує режим руху рідини і був названий числом Рейнольдса.

Число Рейнольдса є умовою динамічної подібності потоків рідини, які рухаються і знаходяться під дією сил внутрішнього тертя. Число Рейнольдса дозволяє встановити режим руху потоку незалежно від роду рідини і є ніби мірою відношення кінетичної енергії рідини до роботи сил в'язкого тертя. Від нього залежать всі безрозмірні коефіцієнти, що є в рівняннях і залежностях, які використовують у практиці гідравлічних розрахунків.

В результаті досліджень встановлено, що для заданого діаметра труби d і кінематичної в'язкості ν один режим переходить в інший при певній середній швидкості течії рідини u . Швидкість, при якій відбувається зміна режимів течії, називається *критичною*. Розрізняють дві критичні швидкості: верхню $u_{кр.в}$ і нижню $u_{кр.н}$. При верхній критичній швидкості ламінарний режим течії переходить у турбулентний; при нижній — турбулентний режим переходить в ламінарний. При цьому завжди $u_{кр.в} > u_{кр.н}$.

Розглянемо результати досліджень Рейнольдса у вигляді логарифмічного графіка, який встановлює зв'язок між втратами напора на тертя вздовж труби $h_{тер}$ та швидкістю u (рис. 4.3). Втрати напора $h_{тер}$ визначаються як різниця показів п'езометрів, встановлених в перерізах 1-1 та 2-2 скляної трубки (див. рис. 4.1). В межах початкової частини кривої AB спостерігається ламінарний режим, в межах кінцевої кривої CD — турбулентний, а в межах BC можливі обидва режими течії, залежно від характеру зміни швидкостей (збільшення їх, чи зменшення). Однак режим течії в межах BC є нестійким і легко порушується під впливом не-

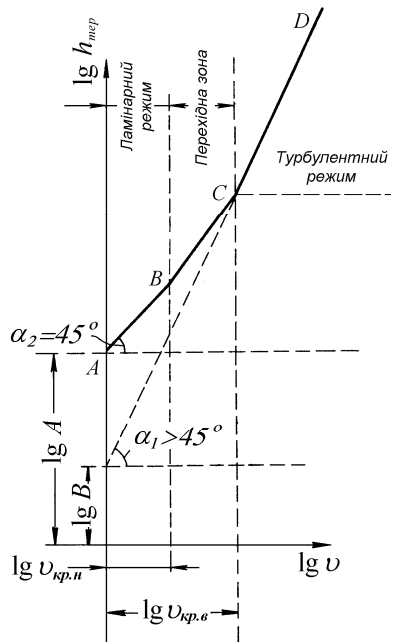


Рисунок 4.3 — Залежність втрат напора від швидкості

значних причин. Особливо нестійкою є ламінарна течія.

У дослідах Рейнольдса були одержані значення критичних чисел в межах: $Re_{кр.н} = 2000$, $Re_{кр.в} = 12000$.

Експерименти, проведені пізніше, показали, що межа критичних чисел Рейнольдса не є постійна, і насправді, за певних умов (малі діаметри труб, змінні перерізи, температури та ін.) ця зона може бути значно ширшою.

Для спрощення розрахунків будемо вважати, що існує лише одне — середнє — критичне значення числа Рейнольдса $Re_{кр} = 2320$. Якщо $Re \leq 2320$, то режим вважається завжди ламінарним, а при $Re > 2320$ — завжди турбулентним. При цьому рух рідини в перехідній зоні виключається через нестійкість існування цієї зони і режиму руху в ній.

Критичному числу Рейнольдса відповідає критична швидкість течії рідини

$$v_{кр} = \frac{\nu Re_{кр}}{d}. \quad (4.2)$$

Ми розглянули явище переходу від одного режиму руху до іншого стосовно внутрішньої задачі, де течія обмежена жорсткими стінками, тобто для труб. Для зовнішньої задачі, де вивчається насамперед рух рідини в пограничному шарі поблизу стінки, незважаючи на начебто велику відміну в явищі, умови виникнення турбулентності подібні до даних для труб.

Вперше вимірювання критичного значення числа Рейнольдса для пограничного шару були виконані в 1924 р. Бюргерсом, який вивчав в аеродинамічній трубці обтікання повітряним потоком плоскої скляної пластинки. Він встановив, що

$$Re_{кр} = \frac{v_n \delta_{кр}}{\nu} \approx 2750 \dots 3500, \quad (4.3)$$

де v_n — швидкість рівномірного потоку, що набігає на пластинку.

Як бачимо, в формулі (4.3) значення $Re_{кр}$ близьке до знайденого Рейнольдсом за формулою (4.1).

Перехід від ламінарного пограничного шару до турбулентного багато в чому залежить від шорсткості стінки, поздовжнього градієнта тиску та інших факторів.

Слід зауважити, що число Рейнольдса як безрозмірний параметр має універсальний характер і визначає режим руху рі-

дин і газів як в натуральних потоках, так і в гідравлічних машинах і їх моделях, тобто є критерієм подібності.

Теоретичною основою для виразу (4.1) є метод подібності і розмірностей, про що буде сказано далі.

4.1.2 Визначення режиму течії рідини в некруглих трубах

Розглядаючи рівномірний рух в каналах довільної форми, вводять поняття гідравлічного радіуса R_z , який є відношенням площі живого перерізу S до змоченого периметра χ

$$R_z = \frac{S}{\chi}. \quad (4.4)$$

Так, для круглої труби діаметром d гідравлічний радіус дорівнює

$$R_z = \frac{\pi d^2}{4 \cdot \pi d} = \frac{d}{4}, \quad (4.5)$$

тобто $d = 4R_z$. Підставивши цей вираз для діаметра в формулу (4.2), знайдемо критичну швидкість течії рідини в некруглих потоках

$$v_{кр} = \frac{2320\nu}{4R_z} = \frac{580\nu}{R_z}. \quad (4.6)$$

В табл. 4.1 наведена величина гідравлічного радіуса для різних форм поперечного перерізу трубопроводу.

Отже, якщо рідина рухається в трубопроводі некруглого перерізу, то режим течії рідини визначатиметься за формулою

$$Re = \frac{v \cdot 4R_z}{\nu} \text{ для } Re_{кр} = 2320 \quad (4.7)$$

або

$$Re = \frac{v R_z}{\nu} \text{ для } Re'_{кр} = 580. \quad (4.8)$$

Тобто, якщо для круглих труб замість діаметра використати гідравлічний радіус, то критичне число Рейнольдса потрібно брати $Re'_{кр} = 580$, а для відкритих русел згідно з експериментальними даними $Re'_{кр} = 300 \dots 500$.

Таблиця 4.1 — Величина гідравлічного радіуса для різних форм поперечного перерізу трубопроводу

Схема	Форма поперечного перерізу	Гідравлічний радіус R_z
	Коло	$\frac{d}{4}$
	Квадрат	$\frac{a}{4}$
	Прямокутник	$\frac{ab}{2(a+b)}$
	Еліпс	$\frac{ab}{3(a+b) - 2\sqrt{ab}}$
	Кільцевий канал	$\frac{D-d}{4}$
	Відкритий прямокутний канал	$\frac{bh}{b+2h}$

Приклад 4.1. Бензин, з кінематичною в'язкістю $\nu = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$, рухається міжтрубним простором. Внутрішній діаметр зовнішнього трубопроводу $d_1 = 200 \text{ мм}$, зовнішній діаметр внутрішнього трубопроводу $d_2 = 100 \text{ мм}$. Визначити режим руху бензину, якщо середня швидкість течії рівна $0,5 \text{ м/с}$. При якій швидкості буде ламінарний режим?

Розв'язок: Оскільки площа перерізу міжтрубного простору має форму кільця, то спочатку знайдемо гідравлічний радіус кільцевого потоку

$$R_z = \frac{S}{\chi} = \frac{\frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4}}{\pi d_1 + \pi d_2} = \frac{d_1 - d_2}{4} = \frac{0,2 - 0,1}{4} = 0,025 \text{ м}.$$

Тоді число Рейнольдса для некруглого перерізу

$$\text{Re} = \frac{v \cdot 4R_c}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 0,025}{0,7 \cdot 10^{-6}} = 71430 > 2320.$$

Тобто, режим течії є турбулентний.

Знайдемо критичну швидкість

$$v_{кр} = \frac{\text{Re}_{кр} \nu}{4R} = \frac{2320 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 0,025} = 0,016 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отже, при швидкості течії рідини меншій 0,016 м/с режим течії буде ламінарним.

4.2 Теорія ламінарної течії в круглих трубах

Ламінарна течія є пошаровою течією без перемішування рідини. Теорія ламінарної течії рідини ґрунтується на законі тертя Ньютона. Тертя між шарами рідини, що рухається, в даному випадку є єдиним джерелом втрат енергії.

Розглянемо усталену ламінарну течію рідини в прямій круглій циліндричній трубі з внутрішнім діаметром $d = 2r_0$. Допустимо, що труба розміщена горизонтально. При цьому виключається вплив сили тяжіння. Достатньо далеко від входу в трубу, де потік вже повністю сформований (стабілізувався), виділимо відрізок довжиною l між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 4.4).

Нехай в перерізі 1-1 тиск рівний p_1 , а в перерізі 2-2 — p_2 . Оскільки діаметр постійний по всій довжині труби, швидкість буде постійною, а коефіцієнт α буде однаковий вздовж потоку внаслідок його стабільності, тому рівняння Бернуллі для ділянок між вибраними перерізами набуде такого вигляду:

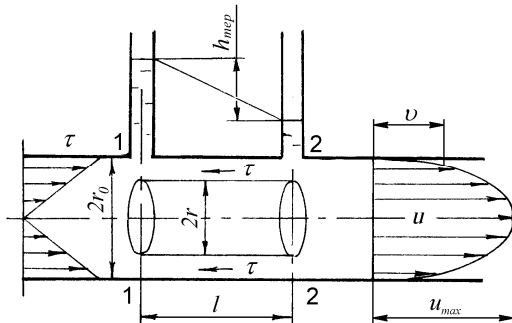


Рисунок 4.4 — До теорії ламінарної течії рідини в трубах

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_{\text{тер}}, \quad (4.9)$$

де $h_{\text{тер}}$ — втрати напору на тертя по довжині ділянки l .
Звідси

$$h_{\text{тер}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{P_{\text{тер}}}{\rho g}, \quad (4.10)$$

що і показують п'єзометри, встановлені в цих перерізах.

В потоці рідини виділимо циліндричний об'єм радіусом r . Вісь виділеного об'єму співпадає з віссю труби, а його основи є у вибраних перерізах. Запишемо рівняння рівномірного руху виділеного об'єму рідини в трубі, тобто рівність нулю суми сил, які діють на об'єм: сил тиску і опору. Позначивши дотичне напруження на бічній поверхні циліндра через τ , одержимо

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0, \quad (4.11)$$

звідки

$$\tau = \frac{P_{\text{тер}}}{2l} r. \quad (4.12)$$

Із формули видно, що дотичні напруження в поперечному перерізі труби змінюються за лінійним законом в функції радіуса. Епюра дотичного напруження показана на рис. 4.4 зліва (ця епюра не залежить від режиму течії).

Виразимо дотичне напруження τ згідно з законом тертя Ньютона через динамічну в'язкість і поперечний градієнт швидкості, при цьому замінимо змінну y (відстань від стінки) поточним радіусом r

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (4.13)$$

Знак мінус зумовлений тим, що напрям відліку r (від осі до стінки) протилежний напрямку відліку y (від стінки).

Підставляючи значення τ в попереднє рівняння, одержимо

$$\frac{P_{\text{тер}}}{2l} r = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (4.14)$$

Знайдемо звідси приріст швидкості

$$du = -\frac{p_{\text{мер}} r dr}{2\mu l}. \quad (4.15)$$

При додатному прирості радіуса одержуємо від'ємний приріст (зменшення) швидкості, що відповідає профілю швидкостей, показаному на рис. 4.4.

Виконавши інтегрування, одержимо

$$u = -\frac{p_{\text{мер}} r^2}{2\mu l} + C. \quad (4.16)$$

Сталу інтегрування C знайдемо з умови, що на стінці при $r = r_0$ швидкість $u = 0$. Тоді

$$C = \frac{p_{\text{мер}} r_0^2}{4\mu l}. \quad (4.17)$$

Швидкість по колу радіусом r

$$u = \frac{p_{\text{мер}}(r_0^2 - r^2)}{4\mu l}. \quad (4.18)$$

Цей вираз є законом розподілу швидкостей в перерізі круглої труби при ламінарній течії. Крива, що зображає епюру швидкостей, є параболою другого степеня (див. рис 4.4).

Максимальна швидкість рідини буде на осі потоку в центрі перерізу (при $r = 0$), тобто

$$u_{\text{max}} = \frac{p_{\text{мер}} r_0^2}{4\mu l}. \quad (4.19)$$

Відношення $p_{\text{мер}}/l$, що входить до формули (4.19), є гідравлічний нахил, помножений на ρg . Ця величина є постійною вздовж прямої труби постійного діаметра.

Використаємо одержаний закон розподілу швидкостей, що описується рівнянням (4.18), для розрахунку витрати. Для цього спочатку запишемо вираз для елементарної витрати через нескінченно малу площадку dS

$$dQ = u dS. \quad (4.20)$$

Швидкість u у формулі (4.20) є функцією радіуса і для ламінарної течії визначається за формулою (4.18), а площадку dS для інтегрування доцільно взяти у вигляді кільця радіусом r і шириною dr , тоді

$$dQ = \frac{p_{\text{мер}} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr}{4\mu l}. \quad (4.21)$$

Для знаходження витрати потоку рідини проінтегруємо вираз (4.21) по всій площі поперечного перерізу потоку, тобто від $r = 0$ до $r = r_0$. Тоді отримаємо

$$Q = \frac{\pi p_{\text{мер}}}{4\mu l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) 2r dr = \frac{\pi p_{\text{мер}}}{8\mu l} r_0^4. \quad (4.22)$$

Середню по перерізу швидкість знайдемо, поділивши витрату на площу. З врахуванням (4.22) одержимо

$$v = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{p_{\text{мер}} r_0^2}{8\mu l}. \quad (4.23)$$

Порівняння цього виразу з формулою (4.19) показує, що середня швидкість при ламінарній течії в 2 рази менша, ніж максимальна

$$v = 0,5 u_{\text{max}}. \quad (4.24)$$

Для одержання залежності втрат напору $h_{\text{мер}}$ на тертя від витрати і розмірів труби визначимо $p_{\text{мер}}$ з формули (4.22).

$$p_{\text{мер}} = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4}. \quad (4.25)$$

Розділивши цей вираз на ρg , замінивши μ на $\nu \rho$ і $p_{\text{мер}}$ на $h_{\text{мер}} \rho g$, а також перейшовши від r_0 до $d = 2r_0$, знайдемо

$$h_{\text{мер}} = \frac{p_{\text{мер}}}{\rho g} = \frac{128\nu l Q}{\pi g d^4}. \quad (4.26)$$

Ця залежність була встановлена французьким лікарем Пуазейлем експериментальним шляхом в 1840 р. і названа формулою Пуазейля. Одержаний закон опору показує, що при ламі-

нарній течії в трубі круглого перерізу втрата напору на тертя пропорціональна витраті, довжині труби і в'язкості рідини в першій степені і обернено пропорційна діаметру труби в четвертій степені. Залежність (4.26) використовується для розрахунку трубопроводів при ламінарній течії.

Втрати напору на тертя по довжині трубопроводу визначаються за формулою Дарсі (1854 р.)

$$h_{\text{тер}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (4.27)$$

де λ — коефіцієнт гідравлічного опору,
 l, d — довжина і внутрішній діаметр трубопроводу,
 v — середня швидкість,
 g — прискорення вільного падіння.

Доведемо справедливість використання формули Дарсі для ламінарної течії.

Для цього в формулі Пуазейля (4.26) замінимо витрату Q виразом $(v \pi d^2 / 4)$. Помноживши і розділивши формулу на середню швидкість v , перегрупувавши множники і врахувавши, що $\text{Re} = vd/\nu$, після скорочення одержимо

$$h_{\text{тер}} = \frac{64\nu}{vd} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (4.28)$$

Порівнюючи (4.28) і (4.27) бачимо, що для ламінарної течії коефіцієнт гідравлічного опору у формулі Дарсі буде рівний

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (4.29)$$

У гідравліці залежність (4.29) отримала назву формули Стокса.

Таким чином, розрахунок втрат напору в трубопроводі при ламінарній течії за формулою Дарсі (4.27) є ідентичний розрахунку за формулою Пуазейля (4.26), якщо для розрахунку коефіцієнта гідравлічного опору використати формулу Стокса (4.29).

Знаючи закон розподілу швидкостей в перерізі труби, можна визначити коефіцієнт Коріюліса α , який враховує нерівномірність розподілу швидкостей в рівнянні Бернуллі для ви-

падку стабілізованої ламінарної течії рідини в круглій трубі. Для цього у виразі

$$\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S}$$

замінімо місцеву і середню швидкості відповідно формулами (4.18) і (4.23), а також врахуємо, що $S = \pi r_0^2$ і $dS = 2\pi r dr$. Після підстановки і скорочення одержимо

$$\alpha = \frac{1}{v^3 S} \int_S u^3 dS = 16 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \frac{r dr}{r_0^2}. \quad (4.30)$$

Виконавши заміну $z = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}$, отримаємо

$$a = -8 \int_1^0 z^3 dz = 2z^4 \Big|_0^1 = 2. \quad (4.31)$$

Отже, дійсна кінетична енергія ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкостей у 2 рази перевищує кінетичну енергію цього ж потоку, але при рівномірному розподілі швидкостей. Таким самим чином можна показати, що секундна кількість руху ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкостей в β разів більша від кількості руху цього ж потоку, але при рівномірному розподілі швидкостей, при цьому коефіцієнт β , який називається коефіцієнтом Буссинеска, в даному випадку дорівнює $4/3$.

Викладена теорія ламінарної течії рідини в круглій трубі підтверджується дослідами, і виведений закон опору не потребує ніяких поправок за винятками таких випадків:

- 1) при течії в початковій ділянці, де проходить поступове формування параболічного профілю швидкостей;
- 2) при течії з теплообміном;
- 3) при течії в капілярах і зазорах з облітерацією;
- 4) при течії з великими перепадами тисків.

4.2.1 Початкова ділянка ламінарної течії

Якщо рідина з якого-небудь резервуара надходить в пряму трубу постійного діаметра і рухається по ній ламінарним потоком, то розподіл швидкостей по перерізу труби поблизу входу є практично рівномірним, особливо, коли вхід виконаний з заокругленням (рис. 4.5). Але під дією сил в'язкості проходить перерозподіл швидкостей по перерізах, і шари рідини, що прилягають до стінки, гальмуються, а центральна частина потоку (ядро), де ще зберігається рівномірний розподіл швидкостей, рухається прискорено, що обумовлено необхідністю проходження через незмінну площу певної витрати рідини.

При цьому товщина шарів загальмованої рідини поступово збільшується, поки не стане рівною радіусу труби, тобто поки шари, що прилягають до протилежних стінок, не зімкнуться на осі труби. Після цього встановлюється характерний для ламінарної течії параболічний профіль швидкостей.

Ділянка від початку труби, на якій формується (стабілізується) параболічний профіль швидкостей, називається початковою ділянкою течії ($l_{пoch}$). За межами цієї ділянки маємо стабілізовану ламінарну течію, параболічний профіль швидкостей залишається незмінним, якою б не була довгою труба за умови збереження її прямолінійності і постійності перерізу. Викладена вище теорія ламінарної течії справедлива саме для цієї стабілізованої ламінарної течії і не підходить в межах початкової ділянки. Для визначення довжини початкової ділянки можна користуватися формулою Шіллера:

$$\backslash \quad \frac{l_{пoch}}{d} = 0,029 \text{ Re} . \quad (4.32)$$

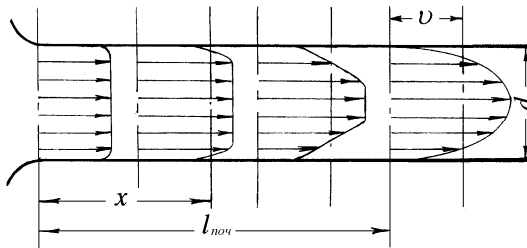


Рисунок 4.5 — Формування профілю швидкостей на початковій ділянці ламінарної течії

Опір на початковій ділянці труби є більшим, ніж на наступних ділянках. Пояснюється це тим, що значення похідної du/du біля стінки труби на початковій ділянці більше, ніж на ділянках стабілізованої течії, а тому й більші дотичні напруження. Втрата напору на ділянці труби, довжина якої $l \leq l_{\text{поч}}$, визначається за формулами (4.26) або (4.27), але з поправним коефіцієнтом k , більшим за одиницю. Значення цього коефіцієнта можна знайти за графіком (рис. 4.6), на якому він зображений як функція безрозмірного параметра $x \cdot 10^3 / (d \cdot \text{Re})$.

Зі збільшенням цього параметра коефіцієнт k зменшується і при значенні

$$\frac{x}{d \text{Re}} = \frac{l_{\text{поч}}}{d \text{Re}} = 0,029, \quad (4.33)$$

тобто при $x = l_{\text{поч}}$, стає рівним 1,09. Отже, опір всієї початкової ділянки труби на 9% більший, ніж опір такої ж ділянки труби, яка перебуває в межах стабілізованої ламінарної течії.

Для коротких труб значення поправочного коефіцієнта k , як видно із графіка, значно відрізняється від одиниці.

Коли довжина l труби більша довжини $l_{\text{поч}}$ початкової ділянки, втрата напору складається із втрат на початковій ділянці і на ділянці стабілізованої течії

$$h_{\text{мер}} = \left[1,09 \lambda_{\text{л}} \frac{l_{\text{поч}}}{d} + \lambda_{\text{л}} \frac{l - l_{\text{поч}}}{d} \right] \frac{v^2}{2g}. \quad (4.34)$$

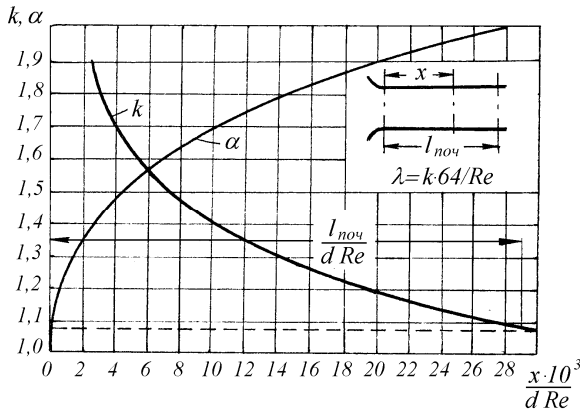


Рисунок 4.6 — Залежність коефіцієнтів k і α від параметра $x \cdot 10^3 / (d \cdot \text{Re})$

Враховуючи формули $\lambda_n = 64/\text{Re}$ і (4.32) і виконуючи відповідні перетворення, одержимо

$$h_{\text{мер}} = \left(0,167 + \lambda_n \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (4.35)$$

Якщо відносна довжина l/d трубопроводу достатньо велика, то додатковий член в дужках, рівний $0,167$, можна не враховувати. Однак для точних розрахунків труб, довжина яких мало відрізняється від $l_{\text{поч}}$, цей член необхідно враховувати.

Для початкової ділянки труби з плавним входом коефіцієнт Коріоліса α зростає від одиниці до двох (див. рис. 4.6).

4.2.2 Гідродинамічна теорія змащення

Для зменшення тертя при обертанні окремих частин механізмів і збільшення їх терміну служби використовуються різні мастильні оливи. Так, наприклад, змащуються поверхні цапф і підшипників осей і валів, що обертаються, поверхні поршнів і циліндрів двигунів внутрішнього згоряння. В результаті змащування між цапфою і підшипником утворюється тонкий шар мастильної оливи.

Довгий час тертя визначалося як тертя між двома твердими тілами. Видатний російський вчений професор Н. П. Петров (1883 р.) відзначив, що в даному випадку не відбувається тертя між поверхнями твердих тіл, оскільки шар оливи відділяє тверді поверхні, що труться, одну від одної, не допускає їх взаємного дотикання. Отже, не може існувати безпосереднього тертя твердих тіл, якщо буде забезпечена мінімальна товщина шару змазки.

Згідно з теорією професора Н. П. Петрова шар оливи розділяє тверді поверхні, прилипаючи до кожної з них. Під час руху змазаної деталі машини частинки, що прилипли до неї, захоплюють частину шару змазки, заставляючи його рухатися разом з металевою поверхнею.

За певної швидкості обертання вала в цьому випадку спостерігається рідинне тертя між окремими шарами рідини без безпосереднього контакту між поверхнею шипа і підшипника.

Для загального уявлення про гідродинамічну теорію змащування розглянемо тертя цапфи в підшипнику при концентричному її обертанні (без ексцентриситету), припустивши, що цапфа покрита рівномірним шаром оливи товщиною δ (рис.

4.7). Радіус цапфи позначимо через r , а її довжину — через l . При обертанні цапфи з коловою швидкістю u частинки оливи, які розміщені біля поверхні цапфи прилипнуть до неї і будуть обертатися з такою ж швидкістю. З віддаленням частинок оливи від цапфи їх колова швидкість обертання зменшуватиметься, спадаючи до нуля біля стінки підшипника. Позначимо через τ напруження сили тертя цапфи об оливу, яка припадає на одиницю площі і називається питомою силою тертя.

Напруження сили тертя, або дотичне напруження, визначається за формулою

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}, \quad (4.36)$$

де $\frac{du}{dr}$ — градієнт швидкості;

μ — коефіцієнт динамічної в'язкості.

Повна поверхня цапфи, на якій відбувається тертя змазування, дорівнює

$$S = 2\pi r l. \quad (4.37)$$

Повна сила тертя цапфи об шар оливи визначається виразом

$$T = \tau S = \mu S \frac{du}{dr}. \quad (4.38)$$

Прийнявши, що швидкість обертання частинок оливи на товщині шару δ лінійно зменшується від величини u до нуля, можна визначити градієнт швидкості за залежністю

$$\frac{du}{dr} = \frac{u}{\delta}. \quad (4.39)$$

Тоді

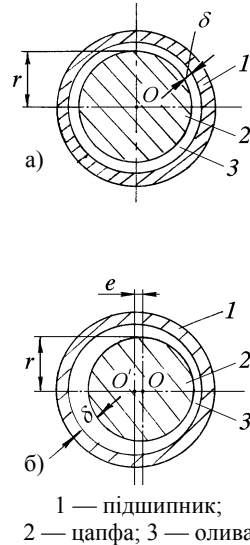


Рисунок 4.7 — До гідродинамічної теорії змащення

$$T = \mu \frac{2\pi r l u}{\delta}. \quad (4.40)$$

Формулу (4.39) можна виразити по-іншому, ввівши в огляд кутову швидкість обертання $\omega = \pi n/30$, де n — число обертів вала. Оскільки $u = \omega r$, то

$$\frac{du}{dr} = \frac{u}{\delta} = \frac{\omega r}{\delta} = \frac{\pi n r}{30\delta}. \quad (4.41)$$

Отже, вираз (4.40) для повної сили тертя цапфи може бути представлений таким чином:

$$T = 2\mu \frac{\pi n r}{30\delta} \pi r l = \mu \frac{\pi^2 r^2 l n}{15\delta}. \quad (4.42)$$

Сила тертя цапфи при заданих її розмірах (r і l) прямо пропорційнальна в'язкості рідини та числу обертів і обернено пропорційна товщині мастильного шару. Визначимо тепер момент сили тертя цапфи відносно осі обертання. Цей момент дорівнює

$$M_T = \mu \frac{2\pi r^2 l u}{\delta} = \mu \frac{\pi^2 r^3 l n}{15\delta}. \quad (4.43)$$

Він дає можливість визначити потужність, яка витрачається на обертання цапфи

$$N_T = M_T \omega = \mu \frac{\pi^2 r^3 l n}{15\delta} \cdot \frac{\pi n}{30} = \mu \frac{\pi^3 r^3 l n^2}{450\delta}. \quad (4.44)$$

Приведені залежності одержані з умови, що товщина шару мастильної рідини δ однакова по колу цапфи. Це відповідає випадку строго центрального розміщення цапфи в підшипнику, коли цапфа обертається без ексцентриситету. Практично завжди має місце ексцентриситет обертання цапфи вала відносно підшипника, оскільки геометрична вісь обертання цапфи не співпадає з геометричною віссю підшипника, як показано на рис. 4.7, б. В цьому випадку значення повної сили тертя T , момент цієї сили M_T , а також потужність N_T повинні перемножуватися на поправний коефіцієнт

$$\beta = \frac{2(1 + 2c^2)}{(2 + c^2)(1 - c^2)^{1/2}}, \quad (4.45)$$

де $c = \frac{e}{\delta}$; e — величина ексцентриситету.
Тоді

$$T = \beta \frac{\mu \pi^2 r^2 l n}{15\delta}; \quad (4.46)$$

$$M_T = \beta \frac{\mu \pi^2 r^3 l n}{15\delta}; \quad (4.47)$$

$$N_T = \beta \frac{\mu \pi^3 r^3 l n^2}{450\delta} \quad (4.48)$$

Видатний російський вчений Н. Е. Жуковський розвинув розв'язок поставленої проф. Н. П. Петровим задачі про рух в'язкої рідини в мастильному шарі між шипом і підшипником.

Подальший розвиток ідей проф. Н. П. Петрова з урахуванням всіх граничних умов і умов подачі змазки здійснений в багатьох працях вчених і, зокрема, в роботах академіка Л. С. Лейбензона.

Приклад 4.2. Визначити втрати напору на тертя при русі нафти в трубі діаметром $d = 50$ мм, довжиною $l = 100$ м, із швидкістю $v = 0,3$ м/с. Кінематичну в'язкість нафти прийняти рівною $0,2 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

Розв'язок: Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 10^{-4}} = 750 < (\text{Re}_{кр} = 2320),$$

отже, режим руху ламінарний. Тоді втрати напору по довжині труби визначаємо за формулою (4.26), врахувавши, що витрата $Q = v\pi d^2/4$:

$$h_{тер} = \frac{128vlQ}{\pi g d^4} = \frac{32vlv}{gd^2} = \frac{32 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 0,3}{9,81 \cdot 0,05^2} = 0,783 \text{ м}.$$

4.3 Основні визначення турбулентної течії рідини

При турбулентному режимі течії спостерігається безперервне інтенсивне перемішування частинок рідини в результаті їх переміщення в напрямі, перпендикулярному до основного напрямку руху потоку. При цьому виникають миттєві зміни величин і напрямів швидкостей руху окремих частинок, що називається пульсацією швидкостей.

Явище пульсації швидкостей полягає в тому, що місцеві швидкості (швидкості руху в точці) безперервно змінюються, коливаючись навколо деякої постійної величини, що називається місцевою осередненою швидкістю. На рис. 4.8 показано картину пульсації швидкості за даними М. П. Великанова, який всебічно вивчав це явище теоретично і експериментально. Визначимо осереднену місцеву швидкість. Візьмемо в рідині елементарну площадку dS , в межах якої відбувається пульсація швидкості. За час dt через цю площадку пройде кількість рідини, рівна $u_M dS dt$, де u_M — змінна величина швидкості. За час t через цю площадку пройде об'єм рідини

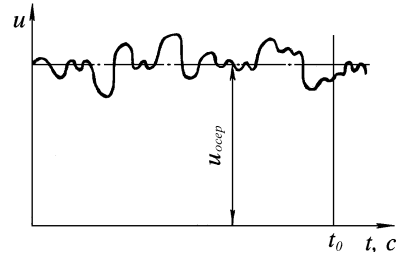


Рисунок 4.8 — Пульсація швидкості в турбулентному потоці

$$dV = \int_0^{t_0} u_M dS dt = dS \int_0^{t_0} u_M dt. \quad (4.49)$$

Тоді елементарна витрата рідини за час t , яка проходить через дану площадку, буде дорівнювати

$$dQ = \frac{dV}{t_0} = \frac{dS \int_0^{t_0} u_M dt}{t_0}. \quad (4.50)$$

Відповідно осереднена місцева швидкість визначиться як

$$u_{осерп} = \frac{dQ}{dS} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u_M dt. \quad (4.51)$$

Якщо виміряти миттєві швидкості u_M за допомогою спеціальних точних приладів і вчислити усереднену місцеву швидкість за залежністю (4.51), то можна побачити, що осереднена місцева швидкість є практично постійною і направленою вздовж потоку. Тому потоки, які перебувають в турбулентному режимі течії, можна розглядати умовно паралельноструминними і використовувати до них рівняння Бернуллі.

На основі результатів експериментальних досліджень і теоретичних припущень Кармана, Прандтля, Нікурадзе та інших вважається, що в потоках, які перебувають в умовах турбулентного режиму, на поверхні труб, стінок, каналів існує досить тонкий шар рідини з режимом руху, близьким до ламінарного. Цей шар рідини називається “ламінарним підшаром”. Товщина його дуже мала і вимірюється долями міліметра. Інша частина потоку створює так зване “турбулентне ядро”. Між ламінарним підшаром та турбулентним ядром існує перехідний шар із змішаним режимом руху (часом ламінарним, часом турбулентним з добре видимими зривами вихрів).

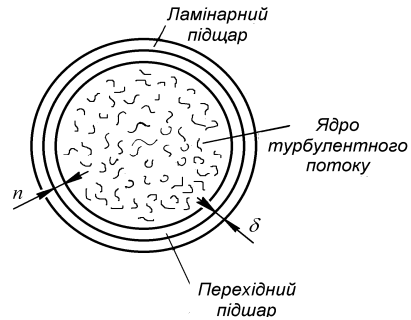


Рисунок 4.9 — Структура турбулентного потоку

Отже, потік, який перебуває в турбулентному режимі руху, складається із ламінарного підшару, перехідного шару і турбулентного ядра (рис. 4.9).

Відзначені особливості турбулентного режиму руху дали можливість запропонувати теорію втрат енергії, засновану на використанні поняття про дотичні напруження, дія яких умовно замінює дію турбулентного перемішування частинок рідини, що рухаються (за роботами Прандтля і Кармана).

Виділимо в рідині два шари A і B (рис. 4.10), які мають площу взаємного дотику S і відносну швидкість руху шару A по шару B , яка дорівнює u_A . В результаті відносного руху шару A зі швидкістю u_A по шару B між ними виникає напруження тертя, яке рівне

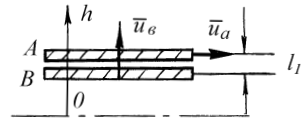


Рисунок 4.10 — До теорії напруження тертя

$$\tau_1 = \mu \frac{du}{dh}. \quad (4.52)$$

Але, окрім переміщення рідини в напрямі загального руху потоку, проходить поперечний рух частинок рідини від шару B до шару A , тобто обмін кількостями руху між шарами, в результаті чого виникає дотична сила.

Припустимо, що швидкість поперечного переміщення частинок дорівнює u_B . Тоді за одиницю часу із шару B в шар A переміститься маса рідини $\rho S u_B$, що викличе появу дотичної сили T

$$T = \rho S u_B u_A. \quad (4.53)$$

Дотичне напруження (внутрішнє тертя), зумовлене обміном кількості рідини між шарами, буде рівне

$$\tau_2 = \frac{T}{S} = \frac{\rho S u_B u_A}{S} = \rho u_B u_A. \quad (4.54)$$

Згідно з теорією Прандтля

$$u_B = k_1 l_1 \left(\frac{du}{dh} \right) \text{ і } u_A = k_2 l_1 \left(\frac{du}{dh} \right), \quad (4.55)$$

де l_1 — віддаль між шарами (рис.4.10),
 k_1 і k_2 — коефіцієнти пропорціональності.

$$\tau_2 = \rho k_1 l_1 \left(\frac{du}{dh} \right) k_2 l_1 \left(\frac{du}{dh} \right) = \rho k_1 k_2 l_1^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2, \quad (4.56)$$

де величина $l = (k_1 k_2 l_1^2)^{1/2}$ названа “довжиною шляху перемішування”.

Таким чином, сумарне напруження тертя в умовах турбулентного режиму отримує такий вираз

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \mu \frac{du}{dh} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2. \quad (4.57)$$

Як показують експериментальні дані, перший член залежності (4.57), який виражає в'язке тертя, малий в порівнянні з

другим, а тому при турбулентному режимі переважають втрати енергії завдяки перемішуванню частинок.

Залежність (4.57) дає можливість одержати приблизний аналітичний розв'язок задачі про розподіл швидкостей по живому перерізу круглої труби.

Розподіл швидкостей по живому перерізу труби в умовах турбулентного режиму руху вивчено лише експериментально; внаслідок складності процесів, які проходять в потоці, точного аналітичного розв'язку немає. Дослідами встановлено:

- 1) швидкості на поверхні стінки дорівнюють нулю внаслідок прилипання до них частинок рідини;
- 2) на дуже маленькій віддалі від поверхні стінки швидкості можуть досягати значної величини, яка мало відрізняється від значень швидкостей в інших точках живого перерізу;
- 3) в точках живого перерізу потоку, більш віддалених від поверхні стінки, швидкості зростають повільніше (рис. 4.11).

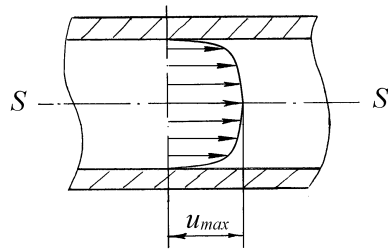


Рисунок 4.11 — Розподіл швидкостей в поперечному перерізі труби

Умовно прийнявши припущення Л. Прандтля про лінійний зв'язок між довжиною шляху перемішування l і віддаллю від стінки h , тобто $l \approx kh$ і, використовуючи залежності (4.56) і (4.57), можемо записати

$$\tau = \tau_2 = \rho k^2 h^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2 \quad (4.58)$$

або

$$\left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} = kh \frac{du}{dh}, \quad (4.59)$$

звідси

$$du = \frac{1}{k} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \frac{dh}{h}. \quad (4.60)$$

Для ділянки потоку біля стінки змінне дотичне напруження тертя τ можна замінити постійним напруженням тертя на стінці τ_0 . Тоді

$$du = \frac{1}{k} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{dh}{h}. \quad (4.61)$$

Величина $(\tau_0/\rho)^{1/2}$ має розмірність швидкості

$$\left[\left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \right] = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^4}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} \right)^{1/2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тому вираз $(\tau_0/\rho)^{1/2}$ в гідравліці отримав назву “динамічної швидкості” або “швидкості зрізу” і позначається u_* .

Для з’ясування зв’язку між величиною швидкості зрізу і втратами енергії скористаємося основним рівнянням рівномірного руху (див. виведення формули (3.78)).

$$\tau_0 = \rho g R_z i, \quad (4.62)$$

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = R_z i. \quad (4.63)$$

де R_z — гідравлічний радіус,
 i — гідравлічний нахил.

Для круглої труби радіусом r можна записати

$$\tau_0 = \frac{\rho g i}{2} r. \quad (4.64)$$

Тоді

$$u_* = \left(\frac{g i r}{2} \right)^{1/2} = \sqrt{g i R_z}. \quad (4.65)$$

Проінтегрувавши диференціальне рівняння (4.61), одержимо

$$u = \frac{u_*}{k} \ln h + C. \quad (4.66)$$

Отже, в потоці, що перебуває в умовах турбулентного режиму, швидкості біля стінки змінюються за логарифмічним законом.

Залежність (4.66) виведена для ділянки потоку, який рухається біля стінки труби.

На основі дослідів Нікурадзе вважають, що коефіцієнт k для труб має постійне значення і дорівнює $k = 0,40$ для всього живого перерізу труби. Однак, як показали досліди Ф. А. Шевелева, цей коефіцієнт не є постійним і залежить від діаметра труби. Разом з тим для одержання приблизних розв'язків можна прийняти $k = const = 0,40$. Визначимо із залежності (4.66) постійну інтегрування з умови, що при $h = r$ швидкість в трубі досягає найбільшого значення і рівна u_{max} . Отже,

$$u_{max} = \frac{u_*}{k} \ln r + C \quad (4.67)$$

або

$$C = u_{max} - \frac{u_*}{k} \ln r. \quad (4.68)$$

Підставимо одержаний вираз для C в залежність (4.66)

$$u = \frac{u_*}{k} \ln h + u_{max} - \frac{u_*}{k} \ln r = u_{max} + \frac{u_*}{k} (\ln h - \ln r), \quad (4.69)$$

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = \frac{1}{k} \left(\ln \frac{r}{h} \right). \quad (4.70)$$

Прийнявши $k = 0,4$ і переходячи до десяткових логарифмів, одержимо

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{r}{h} \quad (4.71)$$

або

$$u = u_{max} - 5,75 u_* \lg \frac{r}{h}. \quad (4.72)$$

Використовуючи одночасно формули (4.65), (4.66) і (4.72), можна отримати значення місцевих швидкостей в різних точках живого перерізу труби і побудувати епюри швидкостей. Приклад такої епюри для круглої труби показаний на рис. 4.11.

Залежність між максимальною і середньою швидкостями рідини в трубі:

$$u_{max} = v(1 + 1,33\sqrt{\lambda}). \quad (4.73)$$

Ця залежність показує, що відношення максимальної осередненої швидкості до середньої по перерізу для турбулентного режиму при значеннях коефіцієнтів гідравлічного опору $\lambda = 0,013 \dots 0,05$ коливається в межах $1,15 \dots 1,3$, що набагато менше такого ж відношення при ламінарному режимі.

4.3.1 Поняття про гладкі і шорсткі труби

Припустимо, що потік перебуває в турбулентному режимі руху, рухається по трубі, виступи шорсткості якої мають розмір Δ . Якщо ламінарний підшар товщиною δ , що обволікає виступи шорсткості, повністю їх перекриває, як це, наприклад, показано на рис. 4.12, то втрати напору не будуть залежати від ступеня шорсткості стінок труби: в цьому випадку рідина ковзає по ламінарному підшару, і відбувається тертя рідини об рідину.

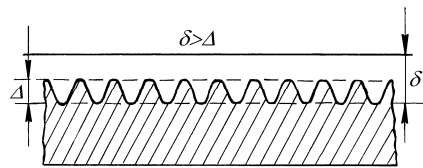


Рисунок 4.12 — Гідравлічно гладкі труби

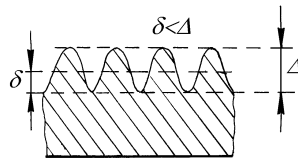


Рисунок 4.13 — Гідравлічно шорсткі труби

Якщо ж виступи шорсткості більші від товщини ламінарного підшару (рис. 4.13), то втрати напору будуть у значній мірі залежати від шорсткості стінок, оскільки в цьому випадку тертя рідини проходить об шорстку поверхню, не зглажену ламінарним підшаром. Згідно з цим розрізняють дві категорії стінок труб: гладкі ($\delta > \Delta$) і шорсткі ($\delta < \Delta$). При цьому необхідно відзначити, що поняття “гладкої стінки” є віднос-

ним, тому що товщина ламінарного підшару залежить від числа Рейнольдса, зменшуючись з його збільшенням

$$\frac{du}{dh} = \frac{u_n}{\delta}, \quad (4.73)$$

де u_n — швидкість на зовнішній ділянці ламінарного підшару. Тоді величина дотичного напруження на стінці труби

$$\tau_0 = \mu \frac{u_n}{\delta}. \quad (4.74)$$

Розділимо отримане рівняння на значення густини ρ

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu u_n}{\rho \delta} = \nu \frac{u_n}{\delta} \quad (4.75)$$

або

$$u_*^2 = \nu \frac{u_n}{\delta}. \quad (4.76)$$

Таким чином, товщина ламінарного підшару рівна

$$\delta = \nu \frac{u_n}{u_*^2} \quad \text{або} \quad \frac{\delta u_*}{\nu} = \frac{u_n}{u_*}. \quad (4.77)$$

На основі дослідів Нікурадзе приймається, що вираз $\delta u_* / \nu = N$ для гладких труб є величиною постійною і рівною $N = 10,47$. Тоді товщина ламінарного підшару буде рівна

$$\delta = \frac{\nu N}{u_*} = \frac{10,47 \nu}{u_*}. \quad (4.78)$$

Вище було встановлено, що “динамічна швидкість” пов’язана з гідравлічним радіусом і гідравлічним нахилом залежністю (4.65). Якщо гідравлічний радіус виразити через діаметр труби d , отримаємо

$$u_* = \sqrt{giR_c} = \frac{1}{2} \sqrt{gid}. \quad (4.79)$$

З іншого боку, гідравлічний нахил i може бути визначений за співвідношенням

$$i = \frac{\lambda v^2}{d 2g}. \quad (4.80)$$

Підставивши це значення в залежність (4.79), одержимо остаточний вираз для “динамічної швидкості”

$$u_* = \frac{1}{2} \left(\frac{gd\lambda v^2}{2gd} \right)^{1/2} = \frac{v}{2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/2}. \quad (4.81)$$

Отже, залежність (4.78) може бути записана в такому вигляді:

$$\delta = \frac{10,47\nu \cdot 2\sqrt{2}}{\nu\sqrt{\lambda}} \approx \frac{30\nu}{\nu\sqrt{\lambda}}. \quad (4.82)$$

Оскільки $v = \frac{\nu \text{Re}}{d}$, то $\frac{\nu}{v} = \frac{d}{\text{Re}}$.

Тому, остаточно маємо

$$\delta = \frac{30d}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} = \frac{60r}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}. \quad (4.83)$$

Отже, товщина ламінарного підшару прямо пропорційна радіусу труби, обернено пропорційна числу Re і квадратному кореню з коефіцієнта гідравлічного опору λ .

Основною характеристикою шорсткості служить так звана абсолютна шорсткість Δ , що являє собою середню величину вказаних виступів і нерівностей, виміряну в лінійних одиницях (див. рис. 4.12). Значення абсолютної шорсткості наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 — Значення абсолютної шорсткості труб Δ , мм

Матеріал труб	Абсолютна шорсткість Δ , мм
Чистих суцільнотягнутих з латуні, міді, свинцю	0,01
Нових суцільнотягнутих сталевих	0,05-0,15
Сталевих з незначною корозією	0,20-0,30
Нових чавунних	0,30
Азбоцементних	0,03-0,80
Старих сталевих	0,50-2,00

Абсолютна шорсткість не може повністю характеризувати вплив стінок на рух рідини. Стінки з однією і тією ж абсолютною шорсткістю в потоках невеликих поперечних розмірів повинні будуть вносити сильніші збурення в потік рідини і створювати більший опір рухові, ніж в потоках більшого перерізу.

Для характеристики впливу шорсткості на гідравлічний опір з урахуванням умов збереження подібності в гідравліці вводиться поняття відносної шорсткості ε , під якою розуміється безрозмірне відношення абсолютної шорсткості до деякого лінійного розміру, що характеризує переріз потоку (наприклад, до радіуса труби r , глибини рідини у відкритому потоці h та ін.).

Таким чином,

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{r} = \frac{2\Delta}{d}. \quad (4.84)$$

В деяких випадках вводиться поняття “відносної гладкості” ε' — величини, оберненої до відносної шорсткості

$$\varepsilon' = \frac{r}{\Delta}. \quad (4.85)$$

Насправді, як показали дослідження, на гідравлічні опори впливає не лише абсолютне значення шорсткості (висоти виступів), але в значній мірі і форма виступів, густина і характер їх розміщення. Необхідно розрізняти стінки з рівномірною і нерівномірною шорсткістю. Рівномірна шорсткість створюється штучно при лабораторних дослідженнях. Стінки промислових трубопроводів, як правило, характеризуються нерівномірною шорсткістю, величина виступів якої дуже відрізняється від середнього значення.

Труби з рівномірною шорсткістю можна рахувати гідравлічно гладкими, якщо

$$\varepsilon \leq 33,7 \operatorname{Re}^{-0,875}. \quad (4.86)$$

Для труб з нерівномірною шорсткістю необхідно, щоб

$$\varepsilon \leq 10 \operatorname{Re}^{-0,875}. \quad (4.87)$$

Оскільки врахувати вплив всіх перелічених вище факторів безпосередніми вимірюваннями неможливо, то для характери-

стики шорсткості стінок промислових труб при гідравлічних розрахунках використовують поняття так званої еквівалентної шорсткості Δ_e . Еквівалентною шорсткістю труб називають таку абстрактну величину однорідної абсолютної шорсткості, втрати напору при якій еквівалентні (рівні) втратам напору в цій трубі при її фактичній шорсткості. Значення еквівалентної шорсткості визначають на основі гідравлічних випробовувань трубопроводів і перерахунків їх результатів за відповідними формулами.

Значення еквівалентної шорсткості наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 — Середнє значення еквівалентної шорсткості Δ_e , мм

Матеріали труби і спосіб виготовлення,	Δ_e , мм
Нові холоднотягнуті і гарячекатані сталеві труби	0,060
Нові сталеві зварні труби	0,070
Нові звичайні оцинковані сталеві труби	0,12
Старі сталеві зварні труби	0,75
Зварні труби з нержавіючої сталі	0,075
Нові холоднотягнуті алюмінієві труби і труби з алюмінієвого сплаву (дюралюмінію)	0,030
Нові чавунні труби	0,60
Очищені чавунні труби, що були у вжитку	0,90

4.3.2 Вплив різних факторів на коефіцієнт гідравлічного опору λ

Питанню впливу різноманітних факторів на значення коефіцієнта гідравлічного опору λ присвячена велика кількість експериментальних і теоретичних робіт.

У 1932 р. Нікурадзе провів дослідження з вивчення гідравлічних опорів у шорстких трубах.

Вказані дослідження були проведені дуже старанно і проводилися в трубах зі штучно однорідною шорсткістю, яка створювалася наклеюванням зерен піску певного розміру на внутрішню поверхню труб. У трубах з такою шорсткістю при різних витратах визначалась втрата напору і за формулою (4.27) вираховувався коефіцієнт λ , значення якого наносилося на графік в функції числа Рейнольдса.

Результати дослідів Нікурадзе подані на графіку (рис. 4.14). Розглядаючи вказаний графік, можна зробити такі важ-

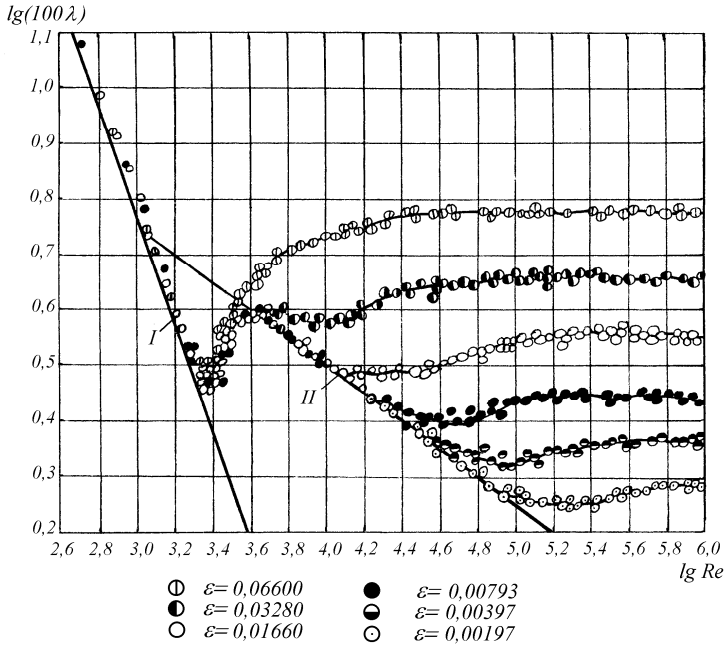


Рисунок 4.14 — Графік залежності $\lambda = f(\text{Re})$ для труб з штучною шорсткістю

ливій висновки. На ділянці ламінарного режиму (тобто при $\text{Re} < 2320$, чому відповідає $\lg \text{Re} < 3,36$) всі дослідні точки незалежно від шорсткості стінок лягають на одну пряму I в лівій частині графіка. Отже, тут λ залежить лише від числа Рейнольдса і не залежить від шорсткості.

При значеннях числа Рейнольдса від 2300 до 3000 (перехідна ділянка від ламінарного режиму до турбулентного) коефіцієнт гідравлічного опору λ швидко зростає зі збільшенням числа Re , залишаючись однаковим для різної шорсткості.

На ділянці турбулентного режиму (тобто при $\text{Re} > 3000$, чому відповідає $\lg \text{Re} > 3,486$) починається вплив шорсткості стінок на коефіцієнт гідравлічного опору. При цьому чим більша шорсткість, тим вище значення λ для одних і тих же чисел Рейнольдса. Для труб з більшою відносною шорсткістю λ поступово зростає зі збільшенням Re , досягаючи деякого значення, яке потім стає постійним.

Для труб з малою шорсткістю дослідні точки в деякому інтервалі значень числа Рейнольдса розміщуються вздовж похилої прямої II , відомої під назвою прямої Блазіуса для “гладких труб”. Відхилення від цієї прямої настає тим швидше, чим більша шорсткість стінок. При цьому коефіцієнт λ також прямує до деякої певної межі, різної для труб з різноманітною шорсткістю, потім при дальшому збільшенні числа Рейнольдса також зберігає свої значення постійним. Це так звана ділянка гідравлічно шорстких труб, що відповідає квадратичному закону опору.

Підсумовуючи, приходимо до висновку, що всю ділянку чисел Рейнольдса можна розділити на п'ять зон:

1-а зона — ламінарний режим $\lambda = f(\text{Re})$;

2-а зона — перехідна від ламінарного режиму до турбулентного;

3-а зона — гідравлічно гладких труб при турбулентному режимі $\lambda = f(\text{Re})$;

4-а зона — змішаного тертя при турбулентному режимі, $\lambda = f(\varepsilon, \text{Re})$;

5-а зона — гідравлічно шорстких труб (квадратична або автомодельна) при турбулентному режимі $\lambda = f(\varepsilon)$.

Одержані результати підтверджують, що поки виступи шорсткості занурені в ламінарний підшар, тобто, коли $\Delta < \delta$, то в даному випадку для структури потоку нема різниці між гладкими і шорсткими поверхнями стінок, і коефіцієнт λ залежить лише від числа Рейнольдса і визначається як для гладких труб (1-3 зони).

Якщо виступи шорсткості виходять за межу ламінарного підшару ($\Delta > \delta$), ламінарна течія порушується, і виступи шорсткості призводять до відриву рідини від стінок і утворення в ній вихрів.

Як вказувалось вище, товщина ламінарного шару зменшується зі збільшенням числа Рейнольдса. Тому у випадку відносно невеликих значень цього числа, коли Δ має такий же порядок, що і δ , коефіцієнт λ повинен залежати не лише від шорсткості стінок, але і від числа Рейнольдса (4-а зона). Якщо число Рейнольдса дуже велике і Δ значно перевищує δ , λ залежить лише від шорсткості (5-а зона).

Як уже говорилося, досліди Нікурадзе проводились у трубах з однорідною штучною шорсткістю. Труби, які викорис-

товують на практиці, мають шорсткість неоднорідну і нерівномірну. Тому залишилось незрозумілим, наскільки правильними будуть висновки, зроблені Нікурадзе для труб із штучною шорсткістю, стосовно до звичайних промислових труб з дійсною шорсткістю і які числові значення шорсткості для даних труб.

Для висвітлення цих питань були присвячені фундаментальні експериментальні дослідження (роботи Кольбука, І. А. Ісаєва, Г. А. Мурина, Ф. А. Шевелева). З них найбільший інтерес представляють експерименти Г. А. Мурина щодо дослідження гідравлічних опорів у звичайних промислових сталевих трубах. Результати цих досліджень представлено на графіку рис. 4.15.

Підтвердивши основні закономірності, встановлені Нікурадзе, ці дослідження дозволили зробити ряд важливих нових висновків. Вони показали, що для труб з дійсною шорсткістю коефіцієнт λ в перехідній зоні є завжди більший, ніж в квадратичній (а не менший, як в Нікурадзе для штучної шорсткості), і знижується. Тому криві, одержані Г. А. Мурином, не мають впадини, характерної для кривих Нікурадзе.

На сьогодні найпоширенішим методом для розрахунку коефіцієнта гідравлічного опору у всьому діапазоні чисел Рей-

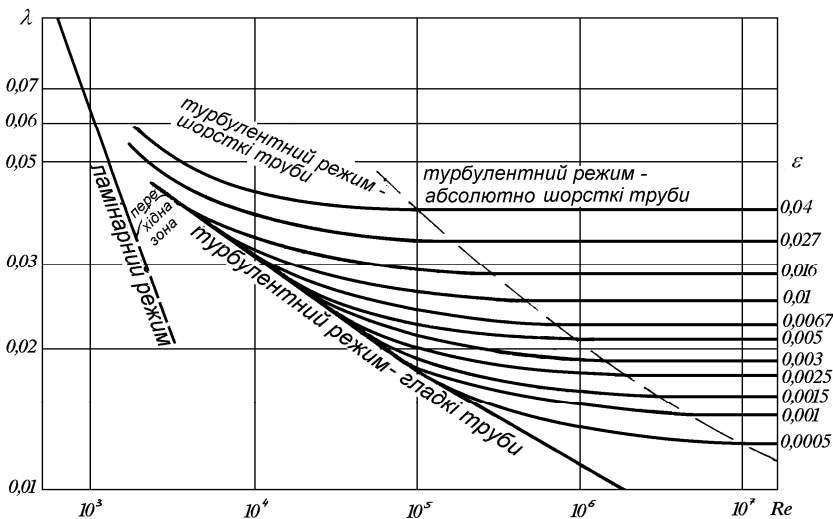


Рисунок 4.15 — Графік залежності $\lambda = f(Re)$ для труб з дійсною шорсткістю

нольдса є діаграма Муді, яка може використовуватись для будь-яких рідин. Ця діаграма побудована Муді в 1944 р. з використанням формул Кольбрука або її похідних у явному та неявному вигляді (рис. 4.16). На графіку пунктирна крива (гранична крива) розділяє перехідну зону від області повної турбулентності. В перехідній зоні коефіцієнт гідравлічного опору λ залежить як від відносної шорсткості $\varepsilon = \frac{\Delta_e}{d}$, так і від числа Рейнольдса Re . А в області повної турбулентності λ є функцією лише $\frac{\Delta_e}{d}$.

4.3.3 Формули для визначення коефіцієнта гідравлічного опору

При турбулентному режимі розрізняють три зони тертя:

- 1) зона гідравлічно гладких труб (гладкостінного тертя), коли коефіцієнт гідравлічного опору λ залежить тільки від числа Рейнольдса Re ;
- 2) зона змішаного тертя, коли коефіцієнт гідравлічного опору λ залежить від Re і від шорсткості труб;
- 3) зона квадратичного тертя (гідравлічно шорстких труб), коли λ залежить тільки від шорсткості.

Межами цих зон є перехідні числа Рейнольдса, знайдені на основі експериментів:

— для гідравлічно гладких труб

$$2320 < Re < Re_I;$$

— для зони змішаного тертя

$$Re_I < Re < Re_{II};$$

— для зони квадратичного тертя

$$Re > Re_{II}.$$

Перехідні числа Рейнольдса Re_I і Re_{II} визначають за формулами

$$Re_I = \frac{10d}{\Delta_e}; \quad Re_{II} = \frac{500d}{\Delta_e}, \quad (4.88)$$

де Δ_e — еквівалентна шорсткість (табл. 4.3).

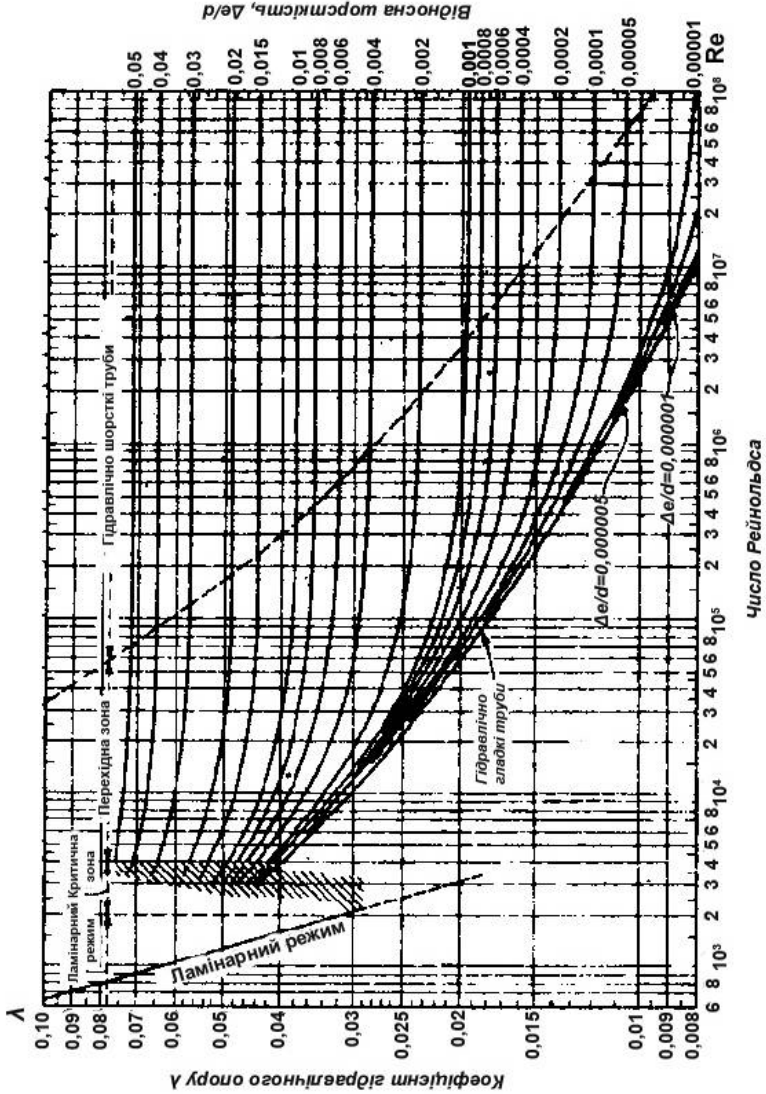


Рисунок 4.16 – Діаграма Мудді для визначення коефіцієнта гідравлічного опору

Для наочності представимо зміну режимів руху і зон залежно від числа Рейнольдса на числовій осі (рис. 4.17).

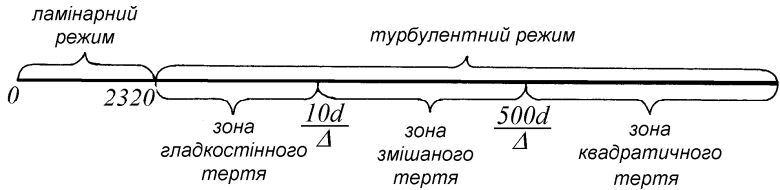


Рисунок 4.17 — Зміна режимів течії

Для зони гідравлічно гладких труб при $Re \leq 10^5$ коефіцієнт гідравлічного опору визначають за формулою Блазіуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (4.89)$$

або за формулою Конакова при виконанні наступних умов: $Re_1 > 10^5$ і $10^5 < Re < Re_1$

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}. \quad (4.90)$$

Для зони змішаного тертя λ рекомендується визначити за формулою Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_e}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (4.91)$$

або Ісаєва

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \lg \left[\frac{68}{Re} + \left(\frac{\Delta_e}{3,7d} \right)^{1,11} \right]. \quad (4.92)$$

У світовій практиці для гідравлічного розрахунку трубопроводів широко використовують формулу Кольбрука

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\Delta_e}{3,7d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right]. \quad (4.93)$$

В зоні квадратичного тертя значення λ рекомендується визначати за формулою Шифрінсона

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_e}{d} \right)^{0,25} \quad (4.94)$$

або Нікурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \lg \varepsilon. \quad (4.95)$$

Наведені вище формули придатні для розрахунку труб будь-якого профілю в поперечному перерізі. Розрахунок для некруглих труб необхідно проводити, використовуючи гідравлічний радіус R_e і число Рейнольдса, обчислене за формулою $Re = 4R_e v / \nu$.

У нафтопровідній практиці режим квадратичного опору не спостерігається. Він буває при транспорті газу, в водопроводах. В нафтопроводах найчастіше трапляється режим гідравлічно гладкого тертя ($2320 < Re < 10d/\Delta_e$), у продуктопроводах — змішане тертя ($10d/\Delta_e < Re < 500d/\Delta_e$).

4.3.4 Визначення коефіцієнта гідравлічного опору згідно з нормами технологічного проектування

Проектні організації при гідравлічному розрахунку нафтопроводів та нафтопродуктопроводів користуються дещо спрощеними методиками.

Залежно від числа Рейнольдса коефіцієнт гідравлічного опору обчислюється таким чином:

- при $Re < 2000$ за формулою Стокса $\lambda = 64/Re$;
- при $2000 < Re < 2800$ за формулою

$$\lambda = (0,16Re - 13) \cdot 10^{-4}; \quad (4.96)$$

- при $2800 < Re < Re_I$ за формулою Блазіуса;
- при $Re_I < Re < Re_{II}$ за формулою

$$\lambda = B + \frac{1,7}{Re^{0,5}}. \quad (4.97)$$

Формули для визначення коефіцієнта гідравлічного опору згідно чинних норм проектування нафтопроводів та нафтопродуктопроводів наведено в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 — Вибір формул для визначення коефіцієнта гідравлічного опору при проектних розрахунках трубопроводів

Ламінарний режим	Перехід від ламінарного режиму до турбулентного	Турбулентний режим	
		зона гідравлічно гладких труб	зона змішаного тертя
0	2000	2800	Re _I Re _{II}
$\lambda = \frac{64}{Re}$	$\lambda = (0,16Re - 13) \cdot 10^{-4}$	$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$	$\lambda = B + \frac{1,7}{Re^{0,5}}$

Граничні значення перехідних чисел Рейнольдса Re_I, Re_{II} і коефіцієнта *B* наведені в таблиці 4.5. Перехідні числа Рейнольдса, що наведені в цій таблиці, одержані для таких величин шорсткості труб:

- для труб діаметром до 377 мм включно прийнята середня абсолютна шорсткість $\Delta_e = 0,125$ мм;
- для труб більшого діаметра — $\Delta_e = 0,100$ мм.

Таблиця 4.5 — Значення перехідних чисел Рейнольдса Re_I, Re_{II} і коефіцієнта *B*

Діаметр (зовнішній), мм	Re _I · 10 ⁻³	Re _{II} · 10 ⁻³	B · 10 ⁴
108	6	400	180
159	10	700	164
219	13	1000	157
273	16	1200	151
325	18	1600	147
377	28	1800	143
426	56	2500	134
530	73	3200	130
630	90	3900	126
720	100	4500	124
820	110	5000	123
920	115	5500	122
1020	120	6000	121
1220	125	6800	120

4.3.5 Узагальнена формула Л. С. Лейбензона для визначення втрат напору

Втрати напору від тертя можуть бути визначені за допомогою узагальненої формули академіка Л. С. Лейбензона, яку одержують з формули Дарсі

$$h = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}.$$

Записавши значення коефіцієнта гідравлічного опору λ у вигляді

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}^m},$$

підставимо в цей вираз формулу для визначення числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d v}$.

Тоді

$$h = \beta \frac{Q^{2-m} v^m l}{d^{5-m}}, \quad (4.98)$$

$$\text{де} \quad \beta = \frac{8A}{4^m \pi^{2-m} g}. \quad (4.99)$$

Тут A і m — коефіцієнти, що залежать від режиму руху рідини (подано в табл. 4.5).

Розглянемо, чому дорівнюють значення коефіцієнтів m і β при різних режимах і в різних зонах тертя.

Для ламінарного режиму

$$m = 1; \quad \beta = \frac{8 \cdot 64}{4\pi g} = \frac{128}{\pi g} = 4,15 \frac{c^2}{m}.$$

Для турбулентного режиму в зоні Блазіуса

$$m = 0,25; \quad \beta = \frac{8 \cdot 0,3164}{4^{0,25} \pi^{1,75} g} = \frac{0,241}{g} = 0,0246 \frac{c^2}{m}.$$

Для турбулентного режиму в квадратичній зоні

$$m = 0; \quad \beta = \frac{8\lambda}{4^0 \pi^2 g} = 0,0826\lambda \frac{c^2}{m}$$

Формула Лейбензона має той недолік, що вона не може бути безпосередньо застосована при турбулентному режимі в зоні змішаного тертя, оскільки показник режиму руху m в цій зоні — змінна величина. Це досить суттєвий недолік, бо зона змішаного тертя охоплює широкий інтервал чисел Рейнольдса, при яких часто здійснюється перекачування малов'язкої нафти і світлих нафтопродуктів. Однак дещо втрачаючи в точності розрахунків, цей недолік узагальненої формули можна усунути таким чином.

Позначимо на графіку $\lg \lambda = f(\lg Re)$ (рис. 4.18) цифрою 1 точку на прямій Блазіуса, де $Re = Re_I$, і цифрою 2 точку на прямій Шифрінсона, де $Re = Re_{II}$ (межі зони змішаного тертя).

Перехідні числа Рейнольдса, які використовуються в гідравлічних розрахунках нафтопроводів:

$$Re_I = \frac{59,5}{\varepsilon^{8/7}}, \quad Re_{II} = \frac{665 - 765 \lg \varepsilon}{\varepsilon}$$

Підставивши перше перехідне число Рейнольдса Re_I у формулу Блазіуса, а друге перехідне число Рейнольдса Re_{II} у формулу Шифрінсона, знайдемо $\lg \lambda_1$ і $\lg \lambda_2$ — ординати точок

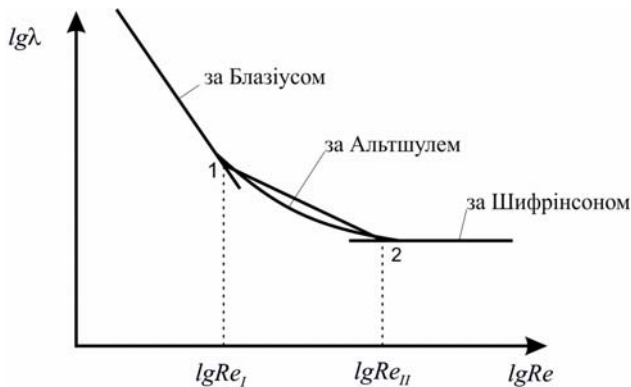


Рисунок 4.18 – Графік залежності $\lg \lambda = f(\lg Re)$

1 і 2. Тепер проведемо через точки 1 і 2 пряму. Її рівняння зводиться до вигляду

$$\lg \lambda = 0,127 \lg \left(\frac{\Delta}{d} \right) - 0,627 - 0,123 \lg \text{Re}. \quad (4.100)$$

Якщо прийняти

$$A = 10^{0,127 \lg(\Delta/d) - 0,627}, \quad (4.101)$$

одержимо

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}^{0,123}}. \quad (4.102)$$

Очевидно, заміна кривої $\lg \lambda = f(\lg \text{Re})$ прямою 1-2 рівно-сильна заміні формули Альтшуля формулою (4.102). Це дає змогу поширити формулу Лейбензона і на зону змішаного тертя. Для цієї зони у відповідності із (4.102) $m = 0,123$, коефіцієнт β буде залежати від Δ/d і визначається за формулою

$$\beta = \frac{8A}{4^m \pi^{2-m} g} = 0,0802 \cdot 10^{0,127 \lg(\Delta/d) - 0,627}. \quad (4.103)$$

Для зручності, значення коефіцієнтів формули Лейбензона для всіх режимів течії зведені у табл. 4.5.

Таблиця 4.5 — Значення коефіцієнтів узагальненої формули Л. С. Лейбензона для різних режимів течії рідини

Режим течії	m	A	$\beta, \text{с}^2/\text{м}$
Ламінарний	1	64	$\frac{128}{\pi g} = 4,15$
Турбулентний в зоні Блазіуса (гладкостінного тертя)	0,25	0,3164	$\frac{0,242}{g} = 0,0247$
Зона змішаного тертя	0,123	$10^{0,127 \lg \Delta_e/d - 0,627}$	$\beta = 0,0802A$
Зона квадратичного тертя	0	λ	$\frac{8\lambda}{\pi^2 g} = 0,0826\lambda$

4.3.6 Визначення втрат напору у водопровідних трубах

Якщо у формулу для визначення втрат на тертя по довжині труби ввести величину гідравлічного нахилу $i = h_{\text{тер}}/l$ і гідравлічний радіус $R_2 = d/4$, то вона набуде такого вигляду:

$$i = \frac{\lambda}{4R_2} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (4.104)$$

Визначивши із цього виразу величину швидкості, одержимо відому формулу Шезі

$$v = C\sqrt{R_2 i}, \quad (4.105)$$

де $C = \left(\frac{8g}{\lambda}\right)^{1/2}$ — коефіцієнт Шезі або швидкісний множник.

Витрату рідини можна одержати, помноживши обидві частини виразу (4.97) на площу поперечного перерізу труби або “живого” перерізу потоку

$$Q = vS = S \cdot C\sqrt{R_2} \cdot \sqrt{i} = K\sqrt{i}. \quad (4.106)$$

Величина $K = S \cdot C\sqrt{R_2}$ називається витратною характеристикою труби, або модулем витрати, і являє собою витрату рідини через заданий живий переріз потоку при гідравлічному нахилі, рівному одиниці. Розмірність витратної характеристики K така ж, як і витрати Q .

Витратна характеристика труби залежить від її діаметра і шорсткості стінки і може бути вирахована для труб різних діаметрів з різною шорсткістю внутрішньої поверхні (табл. 4.6).

Отже, маючи значення витратної характеристики, яку вибирають з таблиць, залежно від діаметра, шорсткості і витрати, можна легко знайти гідравлічний нахил

$$i = \frac{Q^2}{K^2}. \quad (4.107)$$

Тоді втрати напору у водопровідних трубах будуть рівні

$$h = il. \quad (4.108)$$

Таблиця 4.6 — Витратні характеристики водопровідних труб K^2 , m^6/c^2

d , мм	Шорсткість, мм		
	$\Delta = 0,2$	$\Delta = 0,5$	$\Delta = 1,0$
75	0,001133	0,000863	0,000686
100	0,005162	0,003973	0,003187
125	0,016024	0,012469	0,009659
150	0,043370	0,034103	0,027627
175	0,098143	0,076840	0,062259
200	0,197200	0,155456	0,127142
250	0,634161	0,504082	0,415352
300	1,648925	1,414260	1,091313
400	7,406182	5,795040	4,974592
500	23,739375	19,257813	16,130625

4.4 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Від яких характеристик потоку залежить режим руху рідини?
- 2) В чому відмінність турбулентної течії від ламінарної?
- 3) Поясніть фізичний зміст і практичне значення критерію Рейнольдса.
- 4) З'ясуйте закон розподілу дотичних напружень в циліндричному трубопроводі. Для яких режимів цей закон дійсний?
- 5) Зобразіть епюру швидкостей в циліндричному трубопроводі при ламінарному русі рідини. Яке співвідношення між середньою і максимальною швидкостями?
- 6) Від яких параметрів потоку залежать втрати на тертя по довжині при ламінарному русі рідини?
- 7) Які особливості руху рідини на початковій ділянці ламінарної течії?
- 8) Як визначити довжину початкової ділянки ламінарної течії і втрати напору в ній?
- 9) Які особливості руху рідини в плоских і циліндричних зазорах?
- 10) Чим відрізняється розподіл швидкостей в циліндричному трубопроводі при ламінарному і турбулентному режимах руху рідини?
- 11) При якому режимі, ламінарному чи турбулентному, буде більша нерівномірність розподілу швидкостей і чому?
- 12) Поясніть поняття «гладкі» і «шорсткі» поверхні.
- 13) Чи може одна і та ж труба бути «гідравлічно гладкою» і «гідравлічно шорсткою»? В якому випадку?
- 14) Поясніть основні лінії і зони опору на графіку Нікурадзе.
- 15) Як залежать втрати напору від середньої швидкості течії рідини в різних зонах на графіку Нікурадзе?

- 16) Поясніть основні лінії і зони опору на діаграмі Муді.
- 17) Від яких факторів залежить коефіцієнт гідравлічного опору при турбулентній течії і за якими формулами його можна розрахувати?
- 18) Які особливості розрахунку втрат на тертя по довжині для некруглих трубопроводів?
- 19) Як зміняться втрати напору при збільшенні витрати у два рази та одночасному зменшенні в'язкості у два рази?

Контрольні тестові завдання

1. За яким законом змінюється місцева швидкість у перерізі потоку в трубі при ламінарному режимі?
 - а) за параболічним;
 - б) за лінійним;
 - в) за логарифмічним.
2. Чи зміниться графік розподілу швидкостей при переході від ламінарного до турбулентного режиму?
 - а) не зміниться;
 - б) швидкість більш рівномірно розподіляється в перерізі;
 - в) збільшується нерівномірність швидкостей.
3. Як зміниться коефіцієнт гідравлічного опору в напірній трубі сталого діаметра із збільшенням температури, якщо зберігається ламінарний режим і швидкість потоку в трубі залишається постійною?
 - а) збільшиться;
 - б) зменшиться;
 - в) залишиться без змін.
4. Дотичні напруження турбулентних пульсацій пропорційні _____ швидкості:
 - а) середній;
 - б) квадрату;
 - в) миттєвій.
5. Вкажіть, які величини необхідно знати для визначення числа Рейнольдса?
 - а) абсолютну шорсткість труб, діаметр трубопроводу;
 - б) швидкість течії рідини, кінематичну в'язкість рідини, радіус трубопроводу;
 - в) довжину трубопроводу, швидкість течії рідини, кінематичну в'язкість.
6. Що буде з числом Рейнольда, якщо збільшити температуру?
 - а) залишиться без змін;
 - б) збільшиться;
 - в) зменшиться.

7. Рідина рухається в трубопроводі з постійною витратою при ламінарному режимі. Яка залежність між втратою напору $h_{\text{мер}}$ та діаметром труби?

$$\text{а) } h_{\text{мер}} \sim \frac{1}{d}; \quad \text{б) } h_{\text{мер}} \sim \frac{1}{d^4}; \quad \text{в) } h_{\text{мер}} \sim \frac{1}{d^5}.$$

8. Як впливає підігрів рідини (при постійній витраті) на втрату напору в трубах?

- а) завжди зменшує;
- б) завжди збільшує;
- в) зменшує, але не завжди.

9. В якому місці градієнт місцевих швидкостей в перерізі потоку максимальний?

- а) на осі труби;
- б) біля стінок труби;
- в) на деякій віддалі від стінки.

10. Явище пульсації швидкостей полягає в тому, що місцеві швидкості безпосередньо змінюються, коливаючись навколо деякої постійної величини, що називається місцевою швидкістю.

- а) середньою;
- б) осередненою;
- в) пульсаційною.

5 МІСЦЕВІ ОПОРИ

5.1 Класифікація місцевих опорів та визначення втрат напору

Місцевими опорами називають будь-яку зміну живого перерізу потоку рідини або зміну напрямку її руху.

Місцеві втрати напору (енергії) при течії рідини в трубах і каналах виникають у місцях перешкод на шляху її руху: в перекривальній арматурі (вентилі, засуви, крани, клапани); фасонних частинах трубопроводів (коліна, розтруби, переходи, трійники, хрестовини), сітках і фільтрах та інших пристроях.

Врахування місцевих опорів має велике значення при гідравлічних розрахунках так званих коротких трубопроводів, місцеві втрати напору в яких за величиною зіставні з втрати напору на тертя за їх довжиною.

Найпростіші місцеві опори — це раптове розширення і звуження потоку, поступове розширення і звуження потоку (конфузор і дифузор), плавний і різкий повороти потоку (рис. 5.1).

Більш складними випадками місцевих опорів є з'єднання або комбінація перелічених простих опорів. Так, наприклад,

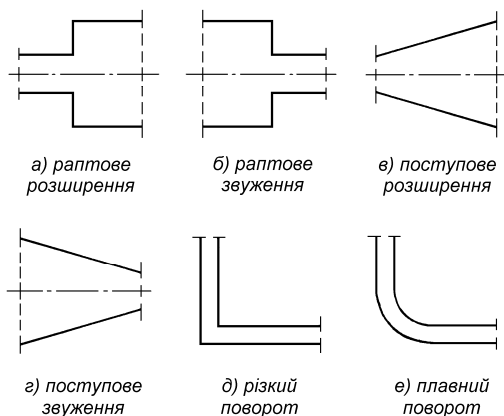


Рисунок 5.1 — Прості місцеві опори

при течії рідини через вентиль (рис.5.2) потік змінює свій напрям, звужується і розширюється до початкових розмірів. При цьому місцеві швидкості змінюються як за величиною, так і за напрямом, створюються вихрі, потік турбулізується.

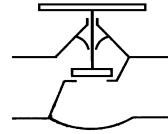


Рисунок 5.2 — Вентиль

Опори виникають також внаслідок змішування (злиття) і поділу потоків.

Складовим елементом різних місцевих опорів є також ділянка потоку, на якій течія стабілізується.

Фізична подібність явищ, що протікають в різних місцевих опорах, дозволяє визначати втрати напору в них як величину пропорційну швидкісному наповорі за відомою формулою Вейсбаха (1842 р.)

$$h_{mo} = \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (5.1)$$

де v — середня швидкість течії рідини після місцевого опору; ξ — безрозмірна величина, так званий коефіцієнт місцевого опору. Значення його в більшості випадків визначають дослідним шляхом.

5.2 Визначення втрат напору при раптовому розширенні (теорема Карно-Борда)

Розглянемо найбільш характерний випадок місцевого опору у вигляді раптового розширення трубопроводу, коли поперечний переріз різко збільшується від S_1 до S_2 , як показано на рис. 5.3.

Частинки рідини, пройшовши переріз 1-1 з деякою швидкістю v_1 , в результаті раптового розширення далі рухаються з швидкістю, яка поступово зменшується до величини v_2 , тому що траєкторії їх плавні. В результаті за площиною 1-1 в зоні розширення, між перерізами 1-1 і 1'-1', виникає розрідження h_g і вихрові течії (див. рис. 5.3). Використає-

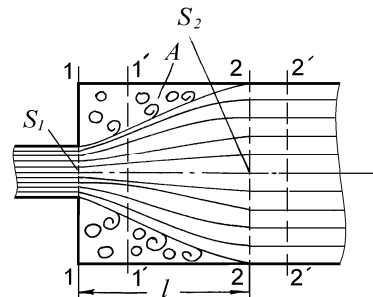


Рисунок 5.3 — Раптове розширення трубопроводу

мо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку рідини і проаналізуємо його, нехтуючи поки що втратами напору

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (5.2)$$

У зв'язку з тим, що $S_2 \gg S_1$, середня швидкість руху $v_2 \ll v_1$, а значить тиск $p_2 > p_1$, тобто при течії рідин в раптовому розширенні має місце ріст п'єзометричного напору, що підтверджується практикою навіть при наявності певних втрат напору на вихроутворення.

Для визначення місцевих втрат напору в раптовому розширенні використаємо теорему про кількість руху, згідно з якою приріст кількості руху рівний імпульсу всіх діючих сил, що діють в цьому напрямі:

$$F dt = m dv. \quad (5.3)$$

Вказаний об'єм за час dt переміститься в нове положення, обмежене перерізами 1'-1' і 2'-2'. Для визначення приросту кількості руху достатньо розглянути масу рідини $m = \rho Q dt$ об'ємів між перерізами 1-1, 1'-1', 2-2 і 2'-2', оскільки кількість руху маси між перерізами 1'-1', 2-2 залишається незмінною. При цьому для шуканого приросту кількості руху

$$F = Q\rho(v_2 - v_1). \quad (5.4)$$

Нехтуючи тертям на поверхні виділеного об'єму, допускаючи, що тиски p_1 і p_2 у всіх перерізах рівномірно розподілені по всій поверхні S_2 , в площині розширення сила F буде дорівнювати

$$F = (p_1 - p_2)S_2, \quad (5.5)$$

а приріст кількості руху становить величину:

$$\rho S_2 v_2 (v_2 - v_1). \quad (5.6)$$

Тоді, використовуючи формулу (5.4), запишемо

$$(p_1 - p_2)S_2 = \rho S_2 v_2 (v_2 - v_1). \quad (5.7)$$

Скоротивши (5.7) на S_2 , розкриємо дужки і поділимо обидві частини рівняння на ρg . В результаті маємо

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g}. \quad (5.8)$$

Запишемо рівнянням Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 (потік горизонтальний і $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) з врахуванням втрат напору $h_{p.p.}$:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{v_2^2}{2g} + h_{p.p.} \quad (5.9)$$

Звідси втрати напору при раптовому розширенні

$$h_{p.p.} = \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \quad (5.10)$$

Перетворимо вираз (5.10), підставивши значення $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}$ з (5.8), і одержимо

$$h_{p.p.} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_2 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{2v_1 v_2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (5.11)$$

або

$$h_{p.p.} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (5.12)$$

Отже, втрати напору при раптовому розширенні рівні швидкісному напові, що відповідає втраченій швидкості $(v_1 - v_2)$.

Залежність (5.12) для визначення втрат напору при раптовому розширенні відома під назвою теореми або формули Карно-Борда.

Нижче подано значення коефіцієнтів для деяких основних видів місцевих опорів. Всі наведені значення відносяться до турбулентного режиму (квадратична зона), одержані на основі дослідів з водою і дані стосовно швидкості потоку за місцевим опором.

5.3 Коефіцієнт місцевого опору при раптовому розширенні

При раптовому розширенні (див. рис. 5.3) втрату напору можна обчислити за формулою (5.12). Винісши в ній за дужки величину v_2 , одержимо

$$h_{p.p} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \xi_{p.p} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (5.13)$$

тобто, коефіцієнт місцевого опору раптового розширення у випадку використання швидкості після розширення буде

$$\xi_{p.p} = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2, \quad (5.14)$$

де S_1, S_2 — перерізи труби до і після розширення.

Таким чином, формулу (5.13) зведено до загального вигляду для визначення втрат у місцевих опорах.

Отже, маючи розміри труби, можна легко вичислити значення коефіцієнта місцевого опору.

Якщо ж у формулі (5.12) винести за дужки значення середньої швидкості перед місцевим опором v_1 , то коефіцієнт місцевого опору $\xi_{p.p.1}$ дорівнюватиме

$$\xi_{p.p.1} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2. \quad (5.15)$$

Коли $S_2 \gg S_1$ (наприклад, рідина витікає з труби в резервуар), то $S_1/S_2 \rightarrow 0$ і коефіцієнт опору виходу з труби $\xi_{вих} = 1$.

5.4 Коефіцієнт місцевого опору при раптовому звуженні

Раптове звуження русла (труби) (рис. 5.4) завжди викликає меншу втрату енергії, ніж раптове розширення з таким самим співвідношенням площ. В цьому випадку втрата зумовлена, по-перше, тертям потоку при вході у вузьку трубу і, по-друге,

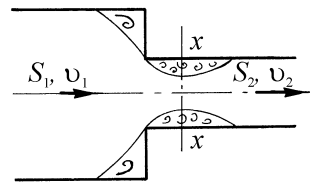


Рисунок 5.4 — Раптове звуження

втратами на вихроутворення, які викликані тим, що потік не обтікає вхідний кут, а зривається з нього і звужується. Кільцевий простір навколо звуженої частини потоку заповнюється завихреною рідиною.

В процесі дальшого розширення потоку відбувається втрата напору, яка визначається за формулою Карно-Борда (5.12). Отже, повна втрата напору

$$h_{\text{звуж}} = \xi_0 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v_2)^2}{2g} = \xi_{\text{звуж}} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (5.16)$$

де ξ_0 — коефіцієнт втрат, зумовлений тертям потоку при вході у вузьку трубу, залежить від відношення S_2 / S_1 і Re ;

v_x — швидкість потоку у звуженому місці;

$\xi_{\text{звуж}}$ — коефіцієнт місцевого опору раптового звуження, залежить від відношення S_2/S_1 .

Знайдені дослідним шляхом значення цього коефіцієнта показано в табл. 5.1 .

Таблиця 5.1 — Значення коефіцієнта місцевого опору $\xi_{\text{звуж}}$ при раповому звуженні

S_2/S_1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\xi_{\text{звуж}}$	0,45	0,39	0,35	0,28	0,20	0,09	0

При раповому звуженні потоку коефіцієнт місцевого опору $\xi_{\text{звуж}}$ можна також вичислити за формулою І. Є. Ідельчика

$$\xi_{\text{звуж}} = 0,5 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right). \quad (5.17)$$

З формули випливає, що в тому випадку, коли можна рахувати $S_2/S_1 = 0$, наприклад, при витіканні рідини з резервуара достатньо великих розмірів в трубу, та за відсутності закруглення вхідних країв, коефіцієнт місцевого опору входу в трубу

$$\xi_{\text{ex}} = 0,5.$$

5.5 Коефіцієнт місцевого опору при поступовому розширенні

Труба, яка поступово розширюється, називається дифузором (рис. 5.5). Течія рідини в дифузорі супроводжується зменшенням швидкості і збільшенням тиску, а отже, перетворенням кінетичної енергії рідини в енергію тиску.

Повну втрату напору $h_{\text{диф}}$ в дифузорі умовно розглядаємо як суму двох складових

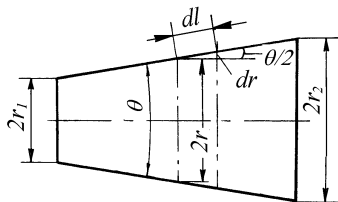


Рисунок 5.5 — Розрахункова схема дифузора

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тер}} + h_{\text{розши}}, \quad (5.18)$$

де $h_{\text{тер}}$ і $h_{\text{розши}}$ — втрати напору на тертя і розширення (на вихроутворення).

Втрату напору на тертя можна приблизно підрахувати таким способом. Розглянемо круглий дифузор з прямолінійною твірною і кутом θ при вершині. Нехай радіус вхідного отвору дифузора рівний r_1 , вихідного — r_2 (див. рис. 5.5).

Оскільки радіус перерізу і швидкість течії рідини є змінні величини вздовж дифузора, то необхідно взяти елементарний відрізок дифузора довжиною вздовж твірної dl і для нього виразити елементарну втрату напору на тертя за основною формулою

$$dh_{\text{тер}} = \lambda \frac{dl}{2r} \frac{v^2}{2g}, \quad (5.19)$$

де v — середня швидкість в довільно взятому перерізі, радіус якого r ;

λ — коефіцієнт гідравлічного опору.

Із елементарного трикутника $dl = dr/\sin(\theta/2)$.

На основі рівняння нерозривності витрати можна записати

$$v = v_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2,$$

де v — швидкість на початку дифузора.

Підставимо ці вирази у формулу (5.19)

$$dh_{\text{мер}} = \lambda \frac{dr}{2r \sin(\theta/2)} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{v_1^2}{2g} \quad (5.20)$$

і виконаємо інтегрування в межах від r_1 до r_2 , тобто вздовж всього дифузора, вважаючи при цьому коефіцієнт λ постійним. Тоді

$$h_{\text{мер}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\theta/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{v_1^2}{2g}, \quad (5.21)$$

де $n = (S_2/S_1) = (r_2/r_1)^2$ — ступінь розширення дифузора.

Втрата напору на розширення (на вихроутворення) має в дифузорі таку ж природу, як і при раптовому розширенні, але менше значення, тому воно виражається тією ж формулою, але з поправним коефіцієнтом k , меншим від одиниці

$$h_{\text{позит}} = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = k \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = k \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.22)$$

Оскільки в дифузорі порівняно з раптовим розширенням гальмування потоку ніби пом'якшується, коефіцієнт k називають коефіцієнтом пом'якшення. Його числове значення для дифузоров з кутами конусності $\theta = 5 \dots 20^\circ$ можна визначити за наближеною формулою

$$k = \sin \theta. \quad (5.23)$$

Враховуючи одержані формули (5.21) і (5.22), вираз (5.21) можна переписати у вигляді

$$h_{\text{диф}} = \left[\frac{\lambda}{8 \sin(\theta/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} = \xi_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}, \quad (5.24)$$

а коефіцієнт місцевого опору дифузора можна виразити формулою

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\theta/2)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \sin \theta \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^2. \quad (5.25)$$

Цей вираз показує, що коефіцієнт $\xi_{\text{диф}}$ залежить від кута θ , коефіцієнта λ та степені розширення n .

Коефіцієнт місцевого опору для дифузorzів можна також визначити за такою формулою

$$\xi = k_{\theta} \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2, \quad (5.26)$$

де k_{θ} — коефіцієнт, який залежить від кута конусності дифузора (табл. 5.2).

Таблиця 5.2 — Значення коефіцієнта k_{θ} для перехідних конусів, які розширюються

θ , градуси	k_{θ}	θ , градуси	k_{θ}	θ , градуси	k_{θ}
5	0,13	40	0,9	90	1,07
10	0,17	50	1,03	100	1,06
15	0,26	60	1,12	120	1,05
20	0,41	70	1,13	160	1,02
30	0,71	80	1,1		

5.6 Коефіцієнт місцевого опору при поступовому звуженні

Поступове звуження труби, тобто кінчна збіжна труба, називається конфузором (рис. 5.6). Течія рідини в конфузорі супроводжується збільшенням швидкості і падінням тиску; оскільки тиск рідини на початку конфузора вищий, ніж в кінці, причиною для виникнення вихровуворень і зривів потоку (як в дифузorzі) є тертя. У зв'язку з цим опір конфузора завжди менший, ніж опір такого ж дифузора.

Втрату напору на тертя у конфузорі можна підрахувати так само, як і для дифузора, тобто спочатку виразити втрату для елементарного відрізка, а потім виконати інтегрування. В результаті одержимо таку формулу:

$$h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\theta/2)} \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.27)$$

Коефіцієнт місцевого опору визначається за формулою

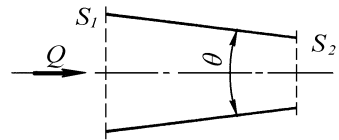


Рисунок 5.6 — Конфузор

$$\xi_{\text{кон}} = \frac{\lambda}{8 \sin(\theta/2)} \frac{n^2 - 1}{n^2}, \quad (5.28)$$

де $n = S_1/S_2$ — ступінь стиску конфузора.

5.7 Значення коефіцієнтів окремих місцевих опорів

Для турбулентного режиму руху значення коефіцієнтів місцевих опорів залежать тільки від форми і геометричних розмірів місцевого опору.

Діафрагма (рис. 5.7) — це пластинка з отвором в центрі, що встановлюється в трубопроводі для вимірювання витрати рідини. Коефіцієнт опору діафрагми залежить від відношення площі перерізу її отвору S_0 до площі перерізу труби S і визначається за формулою І. Є. Ідельчика:

$$\xi = \left(1 + \frac{0,707}{\sqrt{1 - S_0/S_2}} \right)^2 \left(\frac{S_2}{S_0} - 1 \right)^2. \quad (5.29)$$

Таблиця 5.3 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для діафрагми за формулою (5.29)

S_0/S_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ	247	51,3	18,5	8,23	4,00	1,99	0,96	0,42	0,13	0

Якщо діафрагма встановлена в трубі змінного перерізу (рис. 5.8), то необхідно розрізнити “досконале” стиснення при $S_1 > 20S_0$, коли площа труби до діафрагми S_1 перестає впливати на величину коефіцієнта місцевого опору.

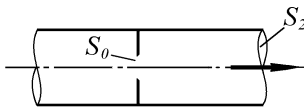


Рисунок 5.7 – Діафрагма

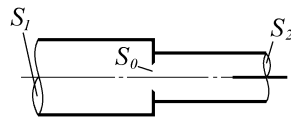


Рисунок 5.8 — Діафрагма в трубі змінного перерізу

Таблиця 5.4 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для діафрагми в трубі змінного перерізу при “досконалому” стисненні

S_0/S_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ	232	51,0	19,8	9,61	5,26	3,08	1,88	1,17	0,73	0,48

Стики труб (з підкладними кільцями, електродугового і контактного зварювання), подібно до діафрагм, можна розглядати як місцеві опори, що зменшують прохідний переріз трубопроводу.

А. В. Альтшуль та В. М. Калицун рекомендують враховувати збільшення опору, що створюється стиками, шляхом введення в розрахункові формули для коефіцієнта гідравлічного опору трубопроводу поправочного коефіцієнта K

$$\lambda_c = K\lambda, \quad (5.30)$$

де λ_c, λ — коефіцієнти гідравлічного опору трубопроводу відповідно зі стиками та без стиків.

Для визначення K рекомендується така формула

$$K = 1 + \frac{\xi_c d}{\lambda l}. \quad (5.31)$$

де ξ_c — коефіцієнт опору стиків; l — віддаль між стиками (довжина труб); d — діаметр труб.

Значення коефіцієнта ξ_c у цій формулі можна приймати залежно від технології зварювання за даними табл. 5.5.

Таблиця 5.5 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ_c зварювальних стиків

Вид стиску	Діаметр труб, мм							
	200	300	400	500	600	700	800	900
З підкладними кільцями ($\delta = 5$ мм)	0,060	0,030	0,018	0,013	0,009	0,007	0,006	0,005
Електродугового та контактного зварювання	0,026	0,0135	0,009	0,006	0,004	0,0028	0,0023	0,002

Вхід у трубу. В тому випадку, коли труба приєднана до резервуара під прямим кутом і має гострі входні краї (рис. 5.9), можна приймати $\xi_{вх} = 0,5$.

При плавному вході (рис. 5.10), залежно від плавності заокруглення, величина коефіцієнта коливається в межах

$$\xi = 0,04 \dots 0,1 \quad (5.32)$$

і для розрахунків може бути взята $\xi = 0,08$.

Якщо труба приєднана під кутом δ (рис. 5.11), то

$$\xi = 0,505 + 0,302 \sin \delta + 0,226 \sin^2 \delta. \quad (5.33)$$

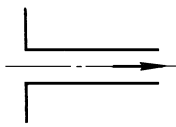


Рисунок 5.9 — Гострі
вхідні краї в трубу

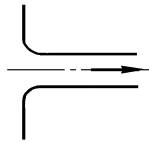


Рисунок 5.10 —
Плавний вхід в трубу

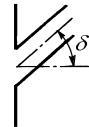


Рисунок 5.11 — Труба при-
єднана під гострим кутом

Коліна та заокруглення. Для коліна без заокруглення (рис. 5.12) при трубах невеликого діаметра коефіцієнт опору визначається за формулою

$$\xi = 0,946 \sin^2(\delta/2) + 2,047 \sin^4(\delta/2), \quad (5.34)$$

де δ — кут повороту труби.

Таблиця 5.6 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для коліна без заокруглення за формулою (5.34)

δ , градуси	20	40	60	80	90	100	120	140
ξ	0,04	0,14	0,36	0,74	0,98	1,26	1,86	2,43

У випадку коліна із заокругленням (рис. 5.13)

$$\xi = \left[0,131 + 0,163 \left(\frac{d}{R_3} \right)^{0,35} \right] \frac{\alpha}{90}, \quad (5.35)$$

де d — діаметр труби;

R_3 — радіус заокруглення;

α — кут повороту труби.



Рисунок 5.12 — Коліно без заокруглення

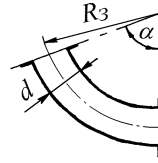


Рисунок 5.13 — Коліно із заокругленням

Таблиця 5.7 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для коліна із заокругленням для кута повороту труби $\alpha = 90^\circ$ за формулою (5.35)

d/R_3	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
ξ	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Трійники. Визначаючи коефіцієнт опору для трійників, необхідно розрізняти два випадки: вхід у магістраль (рис. 5.14) та вихід з неї (рис. 5.15). Відповідні втрати напору знаходять за такими формулами:

— в магістралі між перерізами 1-1 та 2-2

$$h_m = \frac{\xi_m v^2}{2g}; \tag{5.36}$$

— у відводі між перерізами 3-3 та 2-2 (вхід в магістраль, див. рис. 5.14) та 1-1 і 3-3 (вихід із магістралі, див. рис. 5.15)

$$h_v = \frac{\xi_v v^2}{2g}. \tag{5.37}$$

У формулах (5.36) і (5.37) v — середня швидкість у магістралі, підрахована за сумарною витратою $Q_{\text{сум}}$; ξ_m , ξ_v — відпо-

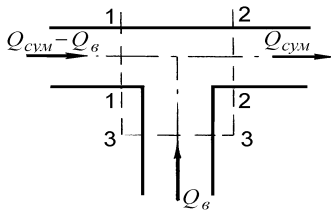


Рисунок 5.14 — Вхід в магістраль

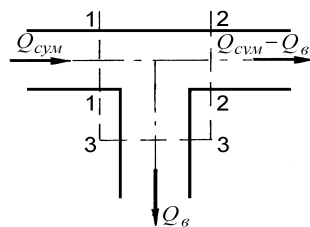


Рисунок 5.15 — Вихід з магістралі

відно коефіцієнти опорів для магістралі і відводу, які визначаються залежно від відношення витрати у відводі Q_e до сумарної витрати $Q_{\text{сум}}$ (табл. 5.8).

Таблиця 5.8 — Значення коефіцієнтів місцевого опору трійника для руху в магістралі ξ_m і через відвід ξ_e

Коефіцієнти місцевого опору	Відношення витрат $Q_e/Q_{\text{сум}}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Для входу в магістраль (див. рис. 5.14)						
ξ_e	-1,20 ¹	-0,40 ¹	0,08	0,47	0,72	0,91
ξ_m	0,04	0,17	0,30	0,41	0,51	0,60
Для виходу з магістралі (див. рис. 5.15)						
ξ_e	0,95	0,83	0,89	0,95	1,10	1,28
ξ_m	0,04	-0,08 ¹	-0,05 ¹	0,07	0,21	0,35

Заслінка (дискова) та **пробковий кран** зображені відповідно на рис. 5.16 і рис. 5.17.

Коефіцієнти місцевого опору ξ в цих випадках залежать від кута закриття α (табл. 5.9).

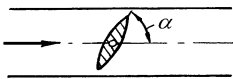


Рисунок 5.16 — Заслінка

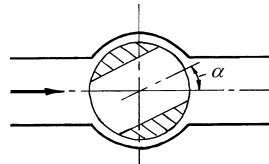


Рисунок 5.17 — Пробковий кран

Засув (рис. 5.18). Коефіцієнт опору ξ змінюється залежно від ступеня відкриття засува h/d (табл. 5.10).

Всмоктувальна коробка (рис. 5.19) з фільтром і зворотним клапаном встановлюється на початку всмоктувального трубопроводу насосних установок. Значення коефіцієнтів місцевого опору всмоктувальної коробки наведені в табл. 5.11.

¹ Від'ємне значення коефіцієнтів місцевого опору трійників пояснюється збільшенням напору у відповідних напрямках внаслідок всмоктувальної дії збіжних або розбіжних потоків рідини.

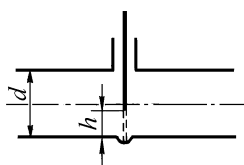


Рисунок 5.18 — Засува

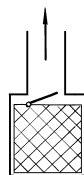


Рисунок 5.19 — Всмоктувальна коробка

Таблиця 5.9 — Значення коефіцієнта місцевого опору для заслінки (дискової) та пробкового крану залежно від кута їх закриття α

α градуси	Пробковий кран	Заслінка	α градуси	Пробковий кран	Заслінка
5	0,24	0,05	40	10,8	17,3
10	0,52	0,29	45	18,7	31,2
15	0,9	0,75	50	32,6	52,6
20	1,54	1,56	55	58,8	106
25	2,51	3,1	60	118	206
30	3,91	5,47	65	256	486
35	6,22	9,68	82,5	-	∞

Таблиця 5.10 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для засува

Степінь відкриття засува	ξ для засува на трубах		Степінь відкриття	ξ для засува на трубах	
	малих ($d \leq 0,5$ м)	великих ($d > 0,5$ м)		малих ($d \leq 0,5$ м)	великих ($d > 0,5$ м)
13/17	43,0	41,0	5/12	4,0	6,3
7/36	35,0	35,0	11/24	2,9	4,6
5/24	28,0	31,0	1/20	2,0	3,3
1/4	17,0	23,0	7/12	1,1	1,5
1/3	7,9	12,0	2/3	0,87	0,77
3/8	5,5	8,6	1	0,5	0,05

Таблиця 5.11 — Значення коефіцієнта місцевого опору ξ для всмоктувальної коробки зі зворотним клапаном залежно від діаметра трубопроводу d

d , м	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,75
ξ	12	8,5	7	6	5,2	3,7	2,5	1,6

Якщо всмоктувальна коробка не має зворотного клапана, коефіцієнт ξ визначають за формулою

$$\xi = (0,675 \dots 1,575) \left(\frac{S}{S_c} \right)^2, \quad (5.38)$$

де S — площа перерізу труби;

S_c — сумарна площа перерізів створів сітки.

Для наближених розрахунків можна приймати середні значення коефіцієнтів місцевих опорів, які наведені в табл. 5.12.

Таблиця 5.12 — Середні значення коефіцієнтів деяких місцевих опорів ξ

Вид місцевого опору	ξ
Вхід в трубу з резервуара без заокруглення вхідних країв	0,5
Вхід в трубу з резервуара при добре заокруглених краях	0,1
Вихід із труби в посудину великих розмірів	1,0
Крутий поворот труби без перехідного заокруглення при куті повороту близько 90°	1,25...1,5
Коліно (плавне заокруглення) на трубі з кутом $\delta = 90^\circ$ при $R_3 \geq 2d$	0,5
Коліно (плавне заокруглення) на трубі з кутом $\delta = 90^\circ$ при $R_3 \approx d$	0,3
Засува наполовину відкрита	2,0
Засува повністю відкрита	0,1
Кран	5...7
Вхід у всмоктувальну коробку зі зворотним клапаном	5...10

5.8 Залежність коефіцієнтів місцевих опорів від режиму течії

Дослідженню місцевих опорів присвячена велика кількість робіт, які в основному є експериментальними. Встановлено, що в загальному випадку коефіцієнт місцевого опору ξ залежить не лише від виду місцевого опору, але і від характеру режиму течії рідини, тобто від числа Рейнольдса. Приклади такої залежності для деяких місцевих опорів показані на рис. 5.20.

Експериментальні дослідження, зокрема роботи А. Д. Альтшуля, Н. З. Френкеля та ін. вчених, показують, що найбільш

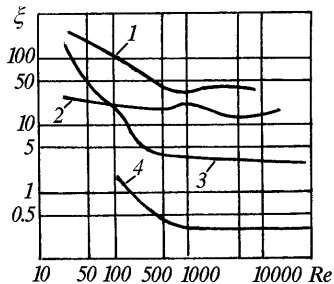
сильно коефіцієнт ξ залежить від числа Re в області ламінарної течії.

А. Д. Альтшуль рекомендує визначати ξ за узагальненою формулою, яка використовується як при ламінарному, так і при турбулентному режимі:

$$\xi = \frac{A}{Re} + \xi_{кв}, \quad (5.39)$$

де A — коефіцієнт, який залежить від виду місцевого опору (табл. 5.13);

$\xi_{кв}$ — коефіцієнт місцевого опору в квадратичній області турбулентного режиму.



1 — кульовий клапан; 2 — вентиль; 3 — засува; 4 — трійник

Рисунок 5.20 — Залежність коефіцієнта місцевого опору ξ від числа Рейнольдса

Таблиця 5.13 — Значення коефіцієнта A у формулі (5.39) для деяких місцевих опорів

Вид опору	A	Вид опору	A
Раптове розширення	30	Пробковий кран	150
Кутник, 90°	400	Звичайний вентиль	3000
Кутник, 135°	600	Кутовий вентиль	400
Коліно з кутом 90°	130	Сферичний клапан	5000
Трійник	150	Засув (повністю відкритий)	75

Для арматури при повному відкритті можна приблизно приймати $A = 500 \xi_{кв}$.

Однак питання про місцеві опори при ламінарному режимі ще недостатньо досліджене.

Що стосується турбулентного режиму, то встановлено, що в цьому випадку зміна коефіцієнтів місцевого опору ξ залежно від числа Рейнольдса настільки незначна, що нею можна нехтувати, і при практичних розрахунках вважають, що ξ залежить лише від геометричної форми місцевого опору.

5.9 Коефіцієнт опору системи

Якщо на трубопроводі є декілька місцевих опорів (засув, коліна, заокруглення, діафрагми і т.д.), що характеризуються коефіцієнтами опорів $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, то для ділянки трубопроводу з постійною витратою сумарні втрати енергії на подолання місцевих опорів можуть бути знайдені простим сумуванням окремих видів місцевих втрат. При цьому потік на прямих ділянках трубопроводу між сусідніми місцевими опорами повинен бути стабілізованим.

Припустимо, що трубопровід довжиною l має постійний діаметр d і витрату рідини Q . На трубопроводі є n місцевих опорів. Встановивши значення коефіцієнтів місцевих опорів $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, можна підрахувати місцеві втрати енергії, знаючи значення $v^2/2g$. Крім цього, необхідно визначити втрати по довжині трубопроводу, використовуючи залежність

$$h_{\text{мер}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.40)$$

Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{\text{мо}1} = \xi_1 \frac{v^2}{2g} \\ h_{\text{мо}2} = \xi_2 \frac{v^2}{2g} \\ \dots \\ h_{\text{мо}n} = \xi_n \frac{v^2}{2g} \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Склавши ліві і праві частини системи рівнянь (5.41), одержимо суму втрат напору на трубопроводі довжиною l :

$$h = \left(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (5.42)$$

Вираз у дужках, який являє собою суму всіх коефіцієнтів місцевих опорів, включаючи коефіцієнт λ , що характеризує втрати напору по довжині, називається коефіцієнтом опору системи

$$\xi_{сум} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n + \lambda \frac{l}{d}. \quad (5.43)$$

Отже,

$$h = \xi_{сум} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.44)$$

Необхідно зауважити, що викладений вище принцип накладання втрат (арифметичне сумування втрат) справедливий лише для стабілізованих потоків.

Довжину ділянки стабілізованого потоку можна приймати в межах $(20 \dots 50)d$. Якщо необхідно одержати більш точні дані про втрати напору, то проводять спеціальні лабораторні дослідження. Це необхідно тому, що ділянка з нестабілізованим потоком сама по собі є джерелом додаткових втрат енергії, що збільшує загальні втрати енергії.

5.10 Еквівалентна та розрахункова довжина трубопроводів

В деяких випадках зручно визначати місцеві опори за так званою еквівалентною довжиною — такою довжиною прямої ділянки трубопроводу даного діаметра, на якій втрата напору на тертя по довжині $h_{тер}$ рівна (еквівалентна) втраті напору $h_{м.о.}$, що створюється відповідним місцевим опором. Еквівалентна довжина $l_{екв}$ може бути знайдена із рівності втрат напору по довжині, що визначаються за формулою Дарсі

$$h_{тер} = \lambda \frac{l_{екв}}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

і місцевими втратами напору, для визначення яких використовується формула Вейсбаха

$$h_{м.о.} = \xi \frac{v^2}{2g}.$$

Прирівнюючи праві частини цих формул, знаходимо

$$l_{екв} = \frac{\xi d}{\lambda}. \quad (5.45)$$

Тоді розрахункова довжина трубопроводу визначатиметься таким чином:

$$l_p = l + l_{екв}, \quad (5.46)$$

де l — довжина трубопроводу, $l_{екв}$ — еквівалентна довжина.

Приклад 5.1. Визначити коефіцієнт місцевого опору засува, встановленого на трубопроводі діаметром $d = 200$ мм, якщо втрати тиску в ньому дорівнюють $\Delta p_{м.о.} = 0,02$ МПа при витраті нафти $Q = 30$ дм³/с. Густина нафти $\rho = 800$ кг/м³.

Розв'язок: Втрати напору в місцевих опорах визначаються за формулою Вейсбаха

$$h_{мо} = \xi \frac{v^2}{2g}.$$

Втрати тиску будуть

$$\Delta p_{мо} = \xi \frac{v^2}{2} \rho,$$

звідки

$$\xi = \frac{2\Delta p_{мо}}{v^2 \cdot \rho}.$$

Середня швидкість руху в трубопроводі

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,03}{3,14 \cdot 0,2^2} = 0,955 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Коефіцієнт місцевого опору

$$\xi = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 10^6}{0,955^2 \cdot 800} = 55.$$

5.11 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Які опори називають місцевими?
- 2) За якою формулою визначають втрати, викликані місцевими опорами?
- 3) Як визначають втрати напору при раптовому розширенні трубопроводу?
- 4) В якому перерізі береться середня швидкість, яка входить у формулу втрат?
- 5) В чому суть принципу накладання втрат?
- 6) Як визначаєть коефіцієнт опору системи трубопроводів (сумарний коефіцієнт опору)?
- 7) Що таке еквівалентна та розрахункова довжини і коли їх використовують?
- 8) Наведіть класифікацію місцевих опорів.

- 9) Чи залежить значення коефіцієнта місцевого опору від режимів течії?

Контрольні тестові завдання

1. Місцевими опорами називають будь-яку зміну _____ перерізу потоку рідини або зміну напрямку її руху.

- а) поперечного;
- б) живого;
- в) будь-якого.

2. Фізична подібність явищ, які відбуваються у різних місцевих опорах, дозволяє визначити втрати напору в них як величину пропорційну _____ напоріві:

- а) геометричному;
- б) п'єзометричному;
- в) швидкісному.

3. _____ довжина — така довжина прямої ділянки трубопроводу даного діаметра, на якій втрата напору на тертя по довжині трубопроводу $h_{тер}$ рівна втраті напору $h_{м.о}$, що створюється відповідним місцевим опором.

- а) розрахункова;
- б) еквівалентна;
- в) початкова.

4. У випадку зони квадратичного опору величина коефіцієнтів місцевих опорів при збільшенні температури:

- а) зменшується;
- б) збільшується;
- в) залишається без змін.

5. Якщо рідина рухається в зоні квадратичного опору, то величина коефіцієнта місцевого опору повинна залежати:

- а) від швидкості;
- б) від роду рідини, тобто від в'язкості;
- в) від геометричної форми місцевого опору.

6. До якої швидкості відноситься формула $\xi = (S_1/S_2 - 1)^2$ для визначення коефіцієнта місцевого опору раптового розширення?

- а) в розширенні;
- б) до розширення;
- в) після розширення.

7. Яку величину не потрібно знати для визначення еквівалентної довжини місцевого опору?

- а) коефіцієнт місцевого опору;
- б) температуру рідини;
- в) діаметр трубопроводу.

8. Діафрагма — це пластинка з отвором в центрі, що встановлюється в трубопроводі для вимірювання _____ рідини:

- а) швидкості;
- б) прискорення;
- в) витрати.

9. При виході рідини з резервуара в трубу коефіцієнт місцевого опору рівний _____:

- а) 1;
- б) 0,5;
- в) 1,5.

10. Втрати напору при раптовому розширенні рівні швидкісному напові, що відповідає _____ швидкості:

- а) збільшенню;
- б) зменшенню;
- в) зміні.

6 ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ ТА НАСАДОК

6.1 Загальна характеристика процесу витікання рідини

При витіканні рідини з отворів та насадок утворюється струмина, яка на відміну від руслових потоків не обмежена твердою поверхнею. Струмінна гідравліка — один із найважливіших розділів гідромеханіки. Процеси витікання рідин через отвори та насадки (короткі патрубки різної конфігурації) мають місце в інженерній практиці. Це, наприклад, операції по випорожненню різних ємностей (бочок, резервуарів, цистерн тощо), витікання рідин із дозуючих пристроїв та форсунок, робота активних гідравлічних турбін, гідромоніторних апаратів та ін. Тому над дослідженням аналогічних процесів і рішенням відповідних практичних задач ще з XVII століття працювали визначні інженери.

Процес витікання рідини з посудин через отвори та насадки обумовлений напором, який визначається глибиною знаходження центра ваги площини отвору відносно рівня рідини в посудині, а також різницею тисків на вільній поверхні рідини і в тому середовищі, куди здійснюється витікання. Тобто відбувається перетворення потенціальної енергії в кінетичну. Якщо цей напір підтримується постійним, процес витікання буде стаціонарний (усталений).

6.2 Витікання рідини через малі отвори в тонкій стінці при сталому напорі

Розглянемо процес витікання рідини через малий отвір у боковій стінці посудини (рис. 6.1). Будемо вважати, що в посудину надходить така ж кількість рідини, яка витікає з неї через отвір. При цьому рівень рідини в посудині буде підтримуватись постійним і, таким чином рух рідини буде усталений.

Перш за все треба відзначити, що при витіканні рідини з отворів в більшості випадків відбувається стиснення струмини внаслідок того, що частинки при вході в отвір рухаються по непаралельних криволінійних траєкторіях. З цієї причини

площа конкретного перерізу струмینی S_c дещо менша від площі отвору S_0 . Ступінь стиснення струмینی характеризується коефіцієнтом стиснення

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0}. \quad (6.1)$$

Стиснення струмینی може бути різним залежно від розташування отвору, з якого здійснюється витікання рідини, відносно дна посудини та інших бокових стінок.

Стиснення може бути повним, якщо отвір розміщений на достатньо великій віддалі від стінок і дна і останні не впливають на характер витікання. Досліди показують, що повне стиснення спостерігається лише в тих випадках, коли відстань від бокових стінок і дна посудини не менша потроєної довжини відповідного розміру отвору. Наприклад, для круглого отвору діаметром d_0 це буде за умови $a > 3d_0$.

При повному стисненні струмینی, як показують досліди, значення $\varepsilon = 0,64$.

Коли ж отвір розміщений близько від стінок або дна, останні перешкоджають процесу стиснення струмینی, оскільки утруднюється всесторонній приплив частинок рідини до отвору. В цих випадках ступінь стиснення струмینی буде меншим, ніж при повному стисненні, а коефіцієнт стиснення $\varepsilon > 0,64$.

У випадку витікання рідини через малі отвори при постійному напорі найбільш важливим є питання визначення швидкості витіснення і витрати рідини. Це питання просто вирішується в тому випадку, коли напір по всьому перерізу отвору можна вважати однаковим. Цю вимогу задовольняє отвір, розташований в горизонтальному дні посудини або малий отвір у боковій стінці посудини (малим вважається отвір, розміри якого значно менші, ніж величина діючого напору H).

Розглянемо детальніше процес витікання рідини через малий отвір площею S_0 в боковій стінці посудини достатньо ве-

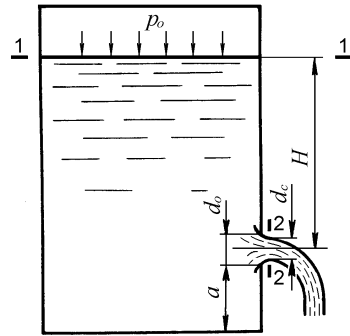


Рисунок 6.1 — Витікання рідини через малий отвір

ликих розмірів у плані (див. рис. 6.1). Позначимо тиск над вільною поверхнею рідини через p_0 , причому будемо вважати що цей тиск, як і висота рівна H , підтримуються постійними за весь час витікання рідини. Через S позначимо площу вільної поверхні рідини. Рідина витікає через отвір у повітряний чи газовий простір з тиском p .

Запишемо рівняння Бернуллі для руху рідини від вільної поверхні в резервуарі (переріз 1-1 на рис. 6.1) до перерізу струмини 2-2 в тій її частині, де вона вже прийняла циліндричну форму, і частинки рідини рухаються по паралельних траєкторіях. Відлік нівелірних висот будемо вести від площини порівняння, що проходить через центр ваги перерізу 2-2.

Оскільки площа отвору значно менша від площі перерізу посудини ($S_0 \ll S$), швидкість рідини v_1 в перерізі 1-1 буде незначна в порівнянні зі швидкістю в перерізі 2-2, яка дорівнює швидкості витікання рідини з отвору v_0 ($v_2 = v_0$). На цій підставі величиною швидкості v_1 можна знехтувати ($v_1 = 0$).

Якщо отвір виконаний у тонкій стінці посудини (стінка вважається тонкою, коли її товщина $\delta < 0,2d_0$) або, коли кромки отвору загострені, як показано на рис. 6.2, і він має конічну форму, опір при витіканні має в основному місцевий характер і втрати напору при протіканні рідини через отвір визначаються формулою

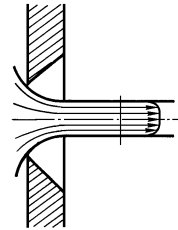


Рисунок 6.2 — Витікання рідини через отвір з загостреними кромками

$$h_0 = \xi_0 \frac{v_0^2}{2g}, \quad (6.2)$$

де ξ_0 — коефіцієнт місцевого опору отвору.

Оскільки швидкість рідини в посудині мала, втрати напору від тертя можна не враховувати через їх незначну величину ($h_{тер} \approx 0$). Тоді загальні втрати напору рідини при русі її від перерізу 1-1 до перерізу 2-2 будуть визначатися величиною h_0 .

Рівняння Бернуллі в цих умовах буде мати вигляд

$$H + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{v_0^2}{2g} + \xi_0 \frac{v_0^2}{2g}. \quad (6.3)$$

Звідси знаходимо швидкість витікання рідини з отвору

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_0}} \left[2g \left(H + \frac{p_0 - p}{\rho g} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Вираз $(H + (p_0 - p)/\rho g)$ у формулі (6.4) називають приведеним розрахунковим напором $H_{np} = H + (p_0 - p)/\rho g$.

У формулі (6.4) стала величина (при турбулентному режимі руху)

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_0}} = \varphi_0 \quad (6.5)$$

є коефіцієнт швидкості для малих отворів, і тоді рівняння швидкості витікання дещо спрощується

$$v_0 = \varphi_0 \sqrt{2gH_{np}}. \quad (6.6)$$

У випадку, коли $p_0 = p$, маємо $H_{np} = H$, і тоді

$$v_0 = \varphi_0 \sqrt{2gH}. \quad (6.7)$$

Коли напір по площі отвору однаковий, розподіл швидкостей по перерізу струмینی буде рівномірний, за винятком зовнішнього шару струмینی, де швидкість частинок дещо загальмована через тертя з кромкою отвору (див. рис. 6.2). Тому коефіцієнт нерівномірності локальних швидкостей в перерізі струмینی можна вважати близьким до 1 ($\alpha_0 \approx 1$). Коефіцієнт місцевого отвору малих отворів невеликий і знаходиться в межах $\xi_0 = 0,05 \dots 0,06$. За таких даних коефіцієнт швидкості для малих отворів $\varphi_0 = 0,97 \dots 0,98$.

Якби при витіканні не було втрат енергії ($\xi_0 = 0$), тоді коефіцієнт швидкості $\varphi_0 = 1$ і теоретична швидкість витікання з отворів залежить тільки від величини приведенного напору

$$v_{теор} = \sqrt{2gH_{np}}. \quad (6.8)$$

З формул (6.6) і (6.8) можна зробити висновок, що коефіцієнт швидкості φ_0 є відношення дійсної швидкості витікання до її теоретичного значення:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{v_{теор}}. \quad (6.9)$$

Маючи швидкість витікання рідини через малий отвір v_0 і площу перерізу струмини S_c , знайдемо витрату рідини

$$Q_0 = v_0 S_c = \varepsilon S_0 \varphi_0 \sqrt{2gH_{np}}. \quad (6.10)$$

Добуток коефіцієнтів стиснення струмини і швидкості ($\varepsilon \varphi_0$) називається коефіцієнтом витрати μ_0

$$\mu_0 = \varepsilon \varphi_0, \quad (6.11)$$

і тоді рівняння витрати рідини через малий отвір

$$Q_0 = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH_{np}}. \quad (6.12)$$

За умови, коли $p_0 = p$,

$$Q_0 = \mu_0 S_0 \sqrt{2gH}. \quad (6.13)$$

За відсутності стиснення струмини ($\varepsilon = 1$) і без врахування опору при витіканні ($\zeta = 0$) коефіцієнт витрати $\mu = 1$, і тоді теоретична витрата

$$Q_{теор} = S_0 \sqrt{2gH}. \quad (6.14)$$

Таким чином, коефіцієнтом витрати є співвідношення дійсної і теоретичної витрати рідини

$$\mu_0 = \frac{Q_0}{Q_{теор}}. \quad (6.15)$$

Фактичне значення коефіцієнта витрати залежатиме від ступеня стиснення струмини, тобто від величини коефіцієнта ε . При повному стисненні струмини і турбулентному режимі течії коефіцієнт витрати малого отвору $\mu_0 = 0,6 \dots 0,62$.

Наведені в цьому параграфі значення коефіцієнтів при витіканні через малий отвір — коефіцієнти витрати μ_0 , стиснення струмини ε_0 і швидкості φ_0 , — встановлені для випадків витікання малов'язких рідин (води, бензину і т.п.), коли витікання відбувається при досить великих числах Рейнольдса, які для отворів визначаються виразом

$$Re_0 = \frac{\sqrt{2gHd}}{\nu}. \quad (6.16)$$

Проте на практиці (особливо в нафтовій справі) бувають випадки витікання з отворів рідин з підвищеною в'язкістю. Як показують досліди, в'язкість таких рідин суттєво впливає на значення коефіцієнтів витікання, і їх значення залежать від числа Re . Характер зміни коефіцієнтів витікання показаний на графіках (рис. 6.3), отриманих А. Д. Альтшулем для витікання рідин із круглих отворів з гострими кромками.

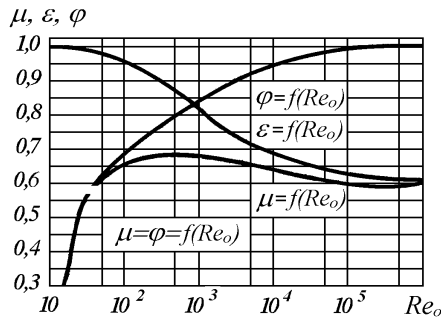


Рисунок 6.3 — Графіки залежностей коефіцієнтів витрати, швидкості та стиснення струмینی від числа Рейнольдса

А. Д. Альтшуль запропонував також такі емпіричні формули для визначення коефіцієнтів витрати:

$$\text{при } Re_0 < 25, \quad \mu = \frac{Re_0}{48};$$

$$\text{при } 25 < Re_0 < 300, \quad \mu = \frac{Re_0}{1,5 + 1,4 Re_0};$$

$$\text{при } 300 < Re_0 < 10000, \quad \mu = 0,59 + \frac{0,27}{Re_0^{1/6}};$$

$$\text{при } 10000 < Re_0 < 300000, \quad \mu = 0,592 + \frac{5,5}{Re_0^{0,5}};$$

При $Re_0 > 300000$ коефіцієнт витрати μ практично є сталою величиною, рівною 0,6 (ця область найбільш характерна для витікання води через отвори).

Наведені формули дійсні для витікання із отворів, якщо число Фруда

$$\text{Fr} = \frac{v_{\text{теор}}^2}{gL} = \frac{2H}{d} > 10,$$

де L — лінійний параметр, який береться рівний діаметру отвору d ; $v_{\text{теор}}$ — швидкість витікання за формулою (6.8);

і число Вебера
$$\text{We} = \frac{\rho v_{\text{теор}}^2 L}{\sigma} = \frac{2\rho g H d}{\sigma} > 200,$$

тобто, якщо сили тяжіння і поверхневого натягу σ впливають в незначній мірі, що переважно буває на практиці.

Тепер дослідимо траєкторію частинок рідини при їх витіканні із отворів. Якщо отвір розташований в дні посудини, траєкторії частинок будуть прямолінійні вертикальні. Для отворів, що є в боковій стінці посудини траєкторії частинок криволінійні внаслідок дії сил тяжіння. Опишемо рівняння траєкторії частинок рідини, що рухаються в центрі струмини, в системі координат xOy , початок якої розміщений в центрі отвору, а вісь y напрямлена вниз (рис. 6.4). Якщо знехтувати опором середовища, куди витікає рідина, рівняння руху частинок рідини можна записати в параметричному вигляді

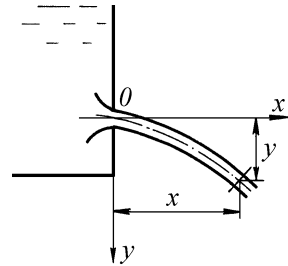


Рисунок 6.4 — Траєкторія струмини

$$x = v_0 t = \varphi \sqrt{2gH} t, \quad (6.17)$$

$$y = \frac{gt^2}{2}, \quad (6.18)$$

де t — час, за який частинка рідини долітає від отвору до точки з координатами x, y .

Визначимо час t з формули (6.17)

$$t = \frac{x}{\varphi \sqrt{2gH}} \quad (6.19)$$

і підставимо його значення в залежність (6.18). Тоді

$$y = \frac{x^2}{4\varphi^2 H}. \quad (6.20)$$

Рівняння (6.20) описує траєкторію і є рівнянням параболи. Таким чином, траєкторії частинок рідини, що витікають з отвору в боковій стінці посудини, мають параболічний характер. На основі рівняння (6.20) можна прогнозувати місце падіння струмини. Крім того, це рівняння використовують в лабораторних експериментах для визначення дослідним шляхом значення коефіцієнта швидкості φ_0 .

Приклад 6.1. Горизонтальна відстань польоту струминки води пожежного брандспойта $x = 20$ м, при висоті його положення від рівня землі $y = 1$ м. Визначити тиск води в рукаві перед наконечником. На скільки необхідно підвищити тиск, щоб відстань струминки збільшилась в два рази?

Розв'язок: Напір води в рукаві визначається з рівняння траєкторії

$$H = \frac{x^2}{4\varphi^2 y}.$$

Для кінечно збіжної насадки $\varphi = 0,96$ і

$$H = \frac{20^2}{4 \cdot 0,96^2 \cdot 1} = 108,5 \text{ м}.$$

Нехтуючи швидкісним напором в рукаві, знайдемо величину тиску:

$$p = \rho g H = 1000 \cdot 9,81 \cdot 108,5 = 1,064 \text{ МПа}.$$

При збільшенні дальності польоту в два рази тиск на викиді рукава необхідно підвищити в 4 рази.

6.3 Витікання рідини через затоплений отвір

На практиці часто доводиться мати справу з витіканням рідини не в атмосферу і не в газове середовище, про що була мова вище, а в простір, заповнений тією ж рідиною, рівень якої розташований вище отвору.

Такий випадок має назву витікання рідини через затоплений отвір або витікання під рівень. Прикладом може бути процес проникнення води всередину суден, барж, понтонів, човнів, поплавків, камер і т.п., пробоїну в дні чи корпусі. Для прикладу візьмемо посудину, в якій є перегородка з отвором, що ділить її на дві частини (рис. 6.5). За наявності більшого

напору в лівій частині $H_1 > H_2$ рідина буде перетікати через отвір з одного відділення в друге.

Припустимо, що обидва рівні в посудині підтримуються незмінними в часі, а площа отвору S_0 мала порівняно з площею перерізу самої посудини. Тоді для визначення швидкості витікання можна буде скористатися отриманою вище залежністю (6.4), в якій слід прийняти

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_{3o}}} = \varphi_{3o}; \quad H = H_1; \quad p_0 = p_1; \quad p = p_2 + \rho g H_2.$$

Тоді швидкість витікання рідини через затоплений отвір

$$v_{3o} = \varphi_{3o} \sqrt{2g \left(H_1 - H_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}. \quad (6.21)$$

Якщо позначити $(H_1 - H_2) = \Delta H$ і $(p_1 - p_2) = \Delta p$, то

$$v_{3o} = \varphi_{3o} \sqrt{2g \left(\Delta H + \frac{\Delta p}{\rho g} \right)}, \quad (6.22)$$

а дійсна витрата рідини через затоплений отвір

$$Q_{3o} = \mu_{3o} S_{3o} \sqrt{2g \left(\Delta H + \frac{\Delta p}{\rho g} \right)} \quad (6.23)$$

Таким чином, і швидкість витікання, і витрата рідини через затоплений отвір не залежать від глибини розташування отвору у перегородці, а залежать лише від різниці гідростатичних напорів по обидва боки від неї.

Досліди показують, що коефіцієнти швидкості і витрати при витіканні через затоплений отвір дещо менші, ніж при витіканні в газоподібне середовище. Але різниця настільки незначна, що в розрахунках нею нехтують і приймають ті ж самі значення для коефіцієнтів, що і при витіканні через незатоплені отвори.

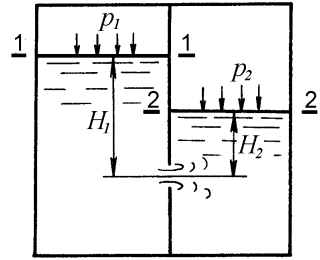


Рисунок 6.5 — Витікання рідини через затоплений отвір

У випадку, коли $p_1 = p_2$ формули для швидкості витікання (6.22) і витрати рідини (6.23) через затоплений отвір дещо спрощуються:

$$v_{3o} = \varphi_{3o} \sqrt{2g\Delta H} \quad (6.24)$$

$$i \quad Q_{3o} = \mu_{3o} S_{3o} \sqrt{2g\Delta H}. \quad (6.25)$$

Якщо $\Delta H = 0$ або $\Delta H \ll \frac{\Delta p}{\rho g}$, то швидкість витікання і витрату рідини визначаються залежно від перепаду тиску Δp

$$v_{3o} = \varphi_{3o} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (6.26)$$

$$Q_{3o} = \mu_{3o} S_{3o} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (6.27)$$

Останнє рівняння може бути використане при розрахунках діафрагм, клапанів, дроселів і т.п.

Приклад 6.2. Відкритий вертикальний циліндричний понтон діаметром $D = 4$ м, висотою $H = 60$ см і масою $m = 1000$ кг перебуває на воді в частково зануреному стані (рис. 6.6). У дні понтона утворилася пробоїна площею $S = 1$ см². Визначити час, протягом якого понтон затоне.

Розв'язок: Якщо знехтувати товщиною стінок понтона, то в будь-який момент часу вага понтона mg разом з вагою рідини, яка натекла всередину, врівноважується дією виштовхувальної сили Архімеда:

$$mg + \rho g \frac{\pi D^2}{4} h_e = \rho g \frac{\pi D^2}{4} (h_e + \Delta h).$$

Тоді різниця рівнів води ззовні і всередині понтона в процесі затоплення буде визначатися як

$$\Delta h = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}$$

і буде незмінною. Отже, проникнення води через затоплений отвір всередину понтона буде відбуватися зі сталою витратою

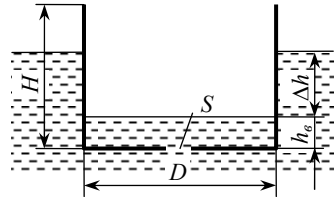


Рисунок 6.6 — До прикладу 6.2

$$Q = \mu S \sqrt{2g \Delta h}.$$

Об'єм води, що має надійти всередину понтона до його затоплення

$$V = \frac{\pi D^2}{4} (H - \Delta h).$$

Час затоплення (з моменту, коли утворилася пробоїна)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{V}{Q} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} (H - \Delta h)}{\mu S \sqrt{2g \Delta h}} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} \left(H - \frac{4m}{\pi D^2 \rho} \right)}{\mu S \sqrt{2g \frac{4m}{\pi D^2 \rho}}} = \\ &= \frac{\frac{3,14 \cdot 4^2}{4} \left(0,6 - \frac{4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^3} \right)}{0,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^3}}} = 86667 \text{ с} = 2 \text{ год. } 4 \text{ хв. } 27 \text{ с.} \end{aligned}$$

6.4 Витікання рідини через великі отвори в боковій стінці

Якщо в боковій стінці посудини зроблений великий отвір (рис. 6.7), то напір H не буде однаковим по всьому перерізу отвору. Для точок в нижній частині отвору він буде більший, а для точок в верхній частині отвору - менший. Це обумовлює нерівномірний розподіл швидкостей по перерізу струмینی рідини з великих отворів.

Щодо визначення місцевих швидкостей в різних точках струмینی, то для цього можна скористатись рівнянням для швидкості витікання з малих отворів, де повинен враховуватись відповідний напір.

Для визначення витрати рідини через великий отвір площу поперечного перерізу отвору необхідно розділити на елементарні площини висотою dH і шириною b (див. рис. 6.7) і для кожного з них визначити елементарну витрату. Повна витрата буде визначатись інтегральною сумою елементарних витрат.

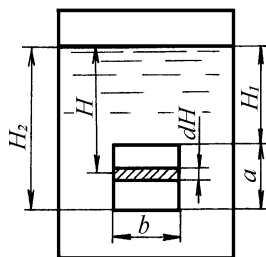


Рисунок 6.7 — Витікання рідини через великий отвір

Витрата рідини через елементарний переріз $dS = b \, dH$ буде рівна

$$dQ = \mu b \sqrt{2gH} \, dH. \quad (6.28)$$

В цьому рівнянні тиск на вільній поверхні рідини і в середовищі, куди витікає рідина, прийнято однаковим.

Повна витрата рідини через весь великий отвір визначається інтегруванням цього рівняння по всьому перерізу отвору

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2gH} \, dH. \quad (6.29)$$

Тут межами інтегрування H_1 і H_2 є значення висот рівня вільної поверхні рідини над верхньою і нижньою основою отвору і $H_1 - H_2 = a$, тобто його висоті.

Після інтегрування отримуємо вираз для витрати рідини через великий отвір

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \quad (6.30)$$

Необхідно зауважити, що коефіцієнти витрати для кожної елементарної струмини мають різні значення. При інтегруванні було прийнято $\mu = const$, тобто введений коефіцієнт витрати всього отвору, що є середнім значенням коефіцієнтів витрати окремих елементарних струмин. Крім того, значення цього коефіцієнта будуть відрізнятися від коефіцієнта витрати для малих отворів, оскільки елементарні площадки, з яких складається великий отвір, є в рідині і не обмежені твердими кромками, а тому не можуть вважатись малими отворами. Як і для малих отворів, коефіцієнт витрати μ для великих отворів знаходять експериментально.

Якщо великий отвір відрізняється від прямокутної форми і розмір $b \neq const$ по всій висоті отвору, необхідно в підінтегральний вираз рівняння (6.29) ввести функціональну залежність $b = f(H)$ і виконати інтегрування з врахуванням цієї залежності. Таким чином, можна отримати рівняння для визначення витрати рідини через великі отвори різної геометричної форми.

6.5 Витікання рідини через насадки при сталому напорі

Насадки — це циліндричні, конічні або коноїдальні патрубки, вмонтовані в стінку чи дно посудини, призначені для зміни параметрів витікання. Співвідношення довжини насадки l до її діаметра d $l/d = 2 \dots 4$. Якщо $l < 2d$, вважають, що витікання рідини проходить через отвір. Якщо $l > 4d$, то розглядають насадку як складний місцевий опір або короткий трубопровід (при $l > 20d$).

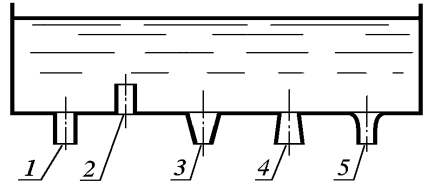


Рисунок 6.8 — Форми насадок

На практиці переважно використовують такі форми насадок (рис. 6.8):

- 1) циліндричні зовнішні;
- 2) циліндричні внутрішні;
- 3) конічно збіжні (кут конусності $12 \dots 15^\circ$) або конфузорні;
- 4) конічно розбіжні (кут конусності $5 \dots 7^\circ$) або дифузорні;
- 5) коноїдальні (виконані за формою стиснутої струмини).

Циліндричними насадками є також отвори в товстій стінці без заокруглення вхідної кромки.

Використовуються насадки для зливу рідини з резервуарів, басейнів, водоймищ тощо.

Конічно збіжні насадки, як і коноїдальні, використовуються для створення струмини з великою кінетичною енергією (пожежні брандспойти, робочі насадки гідромоніторних пристроїв і активних гідравлічних турбін, тощо).

Конічно розбіжні насадки використовують для зменшення вихідної швидкості і перетворення кінетичної енергії потоку в потенціальну енергію напору (тиску) рідини.

Розглянемо детальніше процес витікання рідини через зовнішню циліндричну насадку. Витікання рідини через таку насадку в атмосферу може здійснюватися в двох режимах. При витіканні в першому режимі (рис. 6.9, а) струмина рідини після входу в насадку стискається приблизно так само, як і при витіканні через отвори в тонкій стінці. Потім внаслідок взаємодії стиснутої частини струмини з оточуючою її завихреною рідиною струмина поступово розширюється до розмірів отво-

ру і з насадки виходить повним перерізом. Цей режим витікання називається безвідривним.

Другий режим витікання (див. рис. 6.9, б) характеризується тим, що струмина після стиснення вже не розширюється, а зберігає циліндричну форму і рідина рухається всередині насадки, не дотикаючись до її стінок. В цьому випадку витікання проходить так само, як і з отворів у тонкій стінці (насадка не функціонує). Цей режим може спостерігатись в тих випадках, коли довжина насадки l недостатня ($l < 3d$) або коли витікання здійснюється при великих напорах.

При безвідривному процесі витікання площа перерізу струмини рівна площі перерізу насадки, тому коефіцієнт стиснення струмини $\varepsilon = 1$.

Загальні втрати напору в циліндричній насадці h_n будуть визначатись сумою

$$h_n = h_{ex} + h_p + h_{мер}, \quad (6.31)$$

де h_{ex} — втрати напору на місцевий опір при вході в насадку (раптове звуження);

h_p — втрати напору при раптовому розширенні струмини;

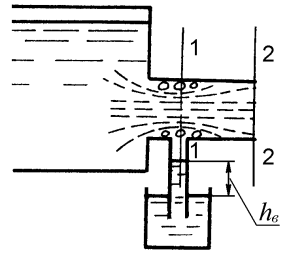
$h_{мер}$ — втрати напору на тертя по довжині насадки.

Використовуючи залежності Дарсі (4.27) та Вейсбаха (5.1), рівняння (6.31) запишемо як добуток суми коефіцієнтів втрат на швидкісний напір на виході із насадки

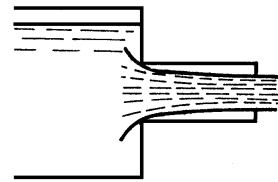
$$h_n = \left(\xi_{p_3} + \xi_{p_p} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (6.32)$$

Таким чином, приведений коефіцієнт опору циліндричної насадки ξ_n буде рівний

$$\xi_n = \xi_{p_3} + \xi_{p_p} + \lambda \frac{l}{d}. \quad (6.33)$$



а)



б)

Рисунок 6.9 — Витікання рідини через зовнішню циліндричну насадку

Коефіцієнт швидкості для насадки буде визначатись формулою

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_n}}. \quad (6.34)$$

Оскільки коефіцієнт опору насадки більший від коефіцієнта опору отвору ($\xi_n > \xi_0$), то коефіцієнт швидкості насадки менший, ніж коефіцієнт швидкості отворів ($\varphi_n < \varphi_0$).

Коефіцієнт витрати для насадок буде рівний коефіцієнту швидкості, тому що $\varepsilon = 1$ ($\mu_n = \varphi_n$).

На основі досліджень процесу витікання рідин через зовнішні циліндричні насадки при безвідливому режимі витікання для великих чисел Re встановлено такі значення коефіцієнтів:

$$\xi_n = 0,5; \quad \varphi_n = \mu_n = 0,82.$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів витрати для циліндричних насадок і отворів в тонкій стінці, маємо

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = \frac{0,82}{0,62} \approx 1,3.$$

Таким чином, циліндричні насадки дають збільшення витрати рідини в 1,3 рази в порівнянні з витратою при витіканні з отворів тих самих розмірів і при тих самих напорах. А швидкість при витіканні з насадок менша внаслідок більшого опору ($\xi_n > \xi_0$).

Коефіцієнт витрати циліндричної насадки μ_n при безвідливому режимі витікання рідини в газове середовище залежить від відносної довжини насадки l/d і числа Рейнольдса. На рис. 6.10 наведені дослідні криві залежності μ_n від числа Re , яке визначається виразом

$$Re = \frac{d\sqrt{2gH}}{\nu}.$$

Коефіцієнт витрати для циліндричних насадок можна також знайти за емпіричною залежністю

$$\mu = \frac{1}{1,23 + \frac{58}{Re} \frac{l}{d}} \quad (6.35)$$

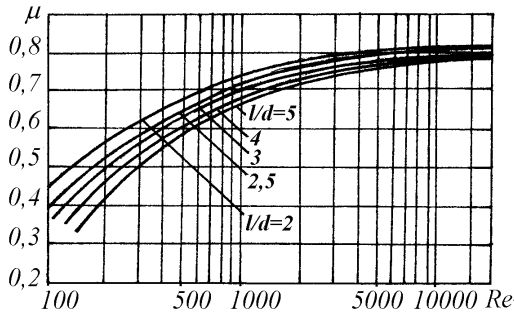


Рисунок 6.10 — Залежності коефіцієнта витрати через циліндричні насадки від числа Рейнольдса

і при $Re = \infty$

$$\mu_n = \mu_{max} = 0,813.$$

Внаслідок стиснення струмини в перерізі 1-1 циліндричної насадки (див. рис. 6.9, а) тиск p_1 є менший від тиску p_2 в середовищі, куди витікає рідина. Якщо останній дорівнює атмосферному тиску p_{atm} (витікання проходить в атмосферу), то в зоні звуження струмини тиск буде менший, ніж атмосферний, і в ній створюється розрідження h_v (вакуум). При цьому, чим більший напір H , при якому проходить витікання рідини, тим менший абсолютний тиск p_1 в звуженому перерізі 1-1 струмини всередині насадки. Різниця тисків $(p_2 - p_1)$ росте пропорційно наповорі H . Пропорційно збільшується і зміщується вправо (до перерізу 2-2) об'єм вакуумного простору, тобто центр перерізу 1-1. Це можна показати з допомогою рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 1-1 і 2-2 (див. рис. 6.9, а)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (6.36)$$

Останній член рівняння — втрати наповору на розширення струмини, яке в даному випадку проходить так само, як і при раптовому розширенні русла, і для якого може бути використана відповідна формула втрат наповору (див. п. 5.2)

Стиснення струмини всередині насадки оцінюється тим же коефіцієнтом стиснення ϵ , що і для отворів. Тому на основі рівняння нерозривності витрати маємо

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Введемо в рівняння Бернуллі (6.36) заміну $v_1 = v_2/\varepsilon$ і виразимо швидкість v_2 відповідною формулою

$$v_2 = v_n = \varphi_n \sqrt{2gH}.$$

Тоді отримаємо різницю тисків

$$p_2 - p_1 = 2\varphi_n^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \rho g H. \quad (6.37)$$

Підставляючи сюди $\varphi = 0,82$ і $\varepsilon = 0,64$, маємо

$$p_2 - p_1 \approx 0,75 \rho g H. \quad (6.38)$$

Коли $p_2 = p_{at}$, то вакуум в перерізі 1-1

$$p_{вак} \approx 0,75 \rho g H, \quad (6.39)$$

і якщо абсолютний тиск в перерізі 1-1 досягне значення тиску насичених парів рідини $p_{н.н.}$, струмина рідини може відірватися від стінок насадка і він перестане функціонувати. З цієї умови, на основі рівняння (6.38), можна визначити значення критичного напору $H_{кр}$, що відповідає максимальному вакууму в перерізі 1-1 циліндричної насадки $p_{вак} = p_{at} - p_{н.н.}$:

$$H_{кр} = \frac{p_{at} - p_{н.н.}}{0,75 \rho g}. \quad (6.40)$$

Отже, безвідривний режим можливий за умови $H < H_{кр}$.

Розглянемо особливості витікання через інші типи насадок.

Внутрішня циліндрична насадка (див. рис. 6.8, поз. 2) — це патрубок, приставлений до отвору з внутрішньої сторони стінки (наприклад, з метою нагріву рідини в зоні насадки). В такій насадці, в порівнянні із зовнішньою, погіршені умови для входу рідини, внаслідок чого збільшується ступінь стиснення струмини всередині насадки, тобто зменшується значення ε . При цьому дещо зростають втрати напору внаслідок більшого завихрення.

Режим витікання через внутрішню насадку визначається напором і відношенням довжини насадки l до її діаметра d

При $l > 2,5d$ рідина заповнює весь вихідний переріз насадки, коефіцієнт стиснення $\varepsilon = 1$; коефіцієнт швидкості $\varphi = 0,71$. При $l \leq 1,5d$ насадка працює неповним перерізом, і рідина витікає з отвору, не торкаючись стінок насадки, що призводить до значного зменшення витрати ($\mu = 0,5$).

У конфузорних насадках (див. рис. 6.8, поз. 3), крім явища внутрішнього стиснення струмини (яке відбувається в меншій мірі, ніж в циліндричних насадках) при виході рідини з насадки відбувається друге (зовнішнє) стиснення. Завдяки тому, що внутрішнє стиснення незначне, втрати напору в цих насадках менші, ніж в циліндричних, коефіцієнт φ — більший, а ε внаслідок додаткового стиснення в вихідному перерізі — менший.

Слід мати на увазі, що при розгляді витікання рідин через насадки, всі коефіцієнти відносяться до їх вихідного перерізу. Якщо коефіцієнт витрати віднести до перерізу отвору в стінці, то внаслідок конусності самої насадки він буде значно менший, тому конфузорні насадки в порівнянні з циліндричними при великих вихідних швидкостях характеризуються меншими витратами рідини.

В дифузорних насадках (див. рис. 6.8, поз. 4) струмина рідини при вході в насадку значно стискається, потім швидко розширюється і заповнює весь переріз насадки. Зовнішнього стиснення при виході з насадки тут нема, і, виходить, коефіцієнт стиснення $\varepsilon = 1$. Але при куті конусності $\theta > 8^\circ$ ця насадка перестає працювати повним перерізом. Струмина витікає, не торкаючись стінок, і витікання проходить так само, як із отворів в тонкій стінці. Коефіцієнти витікання в цих насадках також залежать від кута конусності. В середньому (при $\theta < 8^\circ$) $\varphi = \mu = 0,45$.

Таким чином, в дифузорних насадках швидкість у вихідному перерізі значно менша, ніж в розглянутих вище випадках. Витрата рідини тут збільшується, хоча на перший погляд через невелике значення коефіцієнта витрати це може виглядати сумнівним. Але необхідно врахувати, що цей коефіцієнт відноситься до великого вихідного перерізу насадки. Якщо його віднести до малого вхідного перерізу отвору в стінці, він буде набагато більшим і досягне значення 2-3.

В дифузорних насадках у місці стиснення струмини утворюється значний вакуум, який всмоктує рідину з посудини і цим сприяє процесу витікання.

Коноїдальні насадки (див. рис. 6.8, поз. 5) мають форму, близьку до форми струмینی рідини, яка витікає з отвору в тонкій стінці. Зрозуміло, що в цих насадках внутрішнє стиснення струмینی буде найменшим, зовнішня стисливість відсутня ($\varepsilon = 1$), і коефіцієнти швидкості і витрати більші, ніж для всіх інших типів насадок. Досліди показують, що середні значення $\varphi = \mu = 0,97$, а при якісному їх виконанні і гладких стінках — до 0,995.

Незважаючи на те, що коноїдальні насадки дають найбільші вихідні швидкості і витрати, їх порівняно рідко застосовують головним чином через складність виготовлення.

В табл. 6.1 подано дані середніх значень коефіцієнтів витікання води для різних випадків.

Таблиця 6.1 — Середні значення коефіцієнтів витікання води

Тип отвору або насадки	ε	φ	μ
Отвір в тонкій стінці	0,64	0,97	0,62
Циліндрична насадка зовнішній	1,00	0,82	0,82
Циліндрична насадка внутрішній	1,00	0,71	0,71
Конфузорна насадка ($\theta = 13^\circ$)	0,98	0,96	0,94
Дифузорна насадка ($\theta = 8^\circ$)	1,00	0,45	0,45
Коноїдальна насадка	1,00	0,97	0,97

6.6 Витікання рідини через отвори і насадки при змінному напорі

У випадку витікання рідин при змінному напорі ($H \neq const$) найбільш важливою в практичному відношенні є задача визначення тривалості процесу витікання всього об'єму рідини або його частини. Подібні задачі бувають при розрахунках операцій заповнення і випорожнення резервуарів, бочок, цистерн, водосховищ, басейнів тощо.

При витіканні рідини зі змінним напором безперервно змінюються швидкість і витрата рідини, які безпосередньо залежать від величини напору; отже відбувається неусталений рух рідини. В інших випадках для вирішення вказаної вище задачі повний час витікання ділять на нескінченно малі проміжки. На такому проміжку часу напір можна вважати постійним, а рух рідини — незмінним у часі, тобто усталеним. Це дає можли-

вість використати отримані раніше залежності для усталеного процесу витікання, в тому числі рівняння витрати рідини.

Розглянемо найпростіший приклад витікання рідини в атмосферу через отвір або насадку в дні посудини площею перерізу S_0 із відкритої посудини з вертикальними стінками (рис. 6.11). В цьому випадку площа поперечного горизонтального перерізу посудини S буде по всій висоті H однаковою.

Елементарний об'єм рідини dV , що витікає з посудини за нескінченно малий проміжок часу dt , рівний

$$dV = Q dt = \mu S \sqrt{2gH} dt. \quad (6.41)$$

За цей самий проміжок часу dt рівень рідини в посудині знизиться на dH , і об'єм рідини зменшиться на

$$dV = -S dH. \quad (6.42)$$

Знак “-” тут взятий тому, що в процесі витікання напір зменшується і величина dH буде від'ємною.

Прирівнюємо праві частини рівнянь (6.41) і (6.42):

$$\mu S_0 \sqrt{2gH} dt = -S dH,$$

звідки

$$dt = -\frac{S dH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}}. \quad (6.43)$$

Час, за який рівень рідини опуститься з висоти H_1 до H_2 і з посудини витече певна кількість рідини, знайдемо інтегруванням рівняння (6.43)

$$t = -\int_{H_2}^{H_1} \frac{S dH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}} = \frac{2S(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu S_0 \sqrt{2g}}. \quad (6.44)$$

Повне випорожнення посудини наступить, коли $H_2 = 0$, тому час повного випорожнення буде рівний

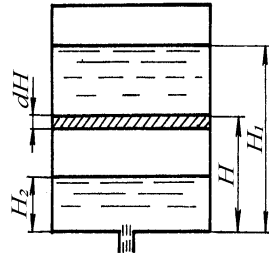


Рисунок 6.11 — Витікання рідини при змінному напорі

$$t_{нов} = \frac{2S\sqrt{H}}{\mu S_0 \sqrt{2g}}. \quad (6.45)$$

Помножимо чисельник і знаменник виразу (5.45) на величину \sqrt{H} і отримаємо

$$t_{нов} = \frac{2SH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}} = \frac{2V}{Q_{поч}} = 2t_0 \quad (6.46)$$

де V — повний об'єм рідини в посудині;

$Q_{поч}$ — початкова витрата рідини при витіканні (на початку процесу випорожнення, коли напір був максимальним і дорівнював H).

Отриманий результат свідчить про те, що час повного випорожнення посудини в два рази більший від тривалості цього процесу (t_0) при збереженні постійного рівня в посудині, коли витрата $Q = Q_{поч} = const$.

В інших випадках, коли поперечний переріз посудини змінний по висоті, треба знати закон зміни площі перерізу посудини залежно від величини H і в інтегральний вираз (6.44) ввести відповідну функціональну залежність $S = f(H)$.

Для посудини правильної геометричної форми (сферичний резервуар, горизонтальна циліндрична цистерна) інтегрування рівняння (6.44) не складає труднощів.

Для прикладу, знайдемо час зливу повністю заповненої ($H_{поч} = D$) залізничної цистерни діаметром D і довжиною L через зливний пристрій площею перерізу S_0 (рис 6.12).

Залежність площі поверхні рідини в посудині від висоти заповнення для цього випадку має вигляд

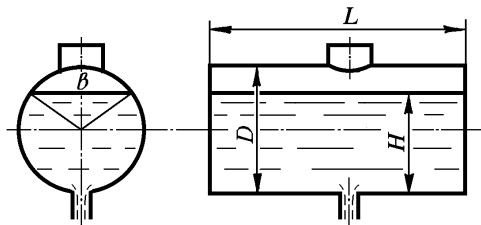


Рисунок 6.12 — Випорожнення залізничної цистерни

$$S = 2L \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 - \left(H - \frac{D}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = 2L \sqrt{H(D-H)}, \quad (6.47)$$

і після інтегрування залежності (6.44) з врахуванням (6.47) час повного витікання рідини становить

$$t_{\text{пов}} = - \int_D^0 \frac{2L \sqrt{H(D-H)}}{\mu S_0 \sqrt{2gH}} dH = \frac{4LD \sqrt{D}}{3\mu S_0 \sqrt{2g}}. \quad (6.48)$$

Приклад 6.3. У вертикальному циліндричному резервуарі діаметром $D = 4$ м зберігається 60 т дизпалива (густина $\rho = 840$ кг/м³). Визначити час спуску шару води ($\rho_e = 1000$ кг/м³) товщиною $a = 8$ см, якщо діаметр зливного насадка в його дні $d = 50$ мм, коефіцієнт місцевого опору насадка $\xi = 2,3$. Тиск на вільній поверхні в резервуарі атмосферний.

Розв'язок: Визначимо висоту наливу в резервуарі

$$H = \frac{4m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{840 \cdot 3,14 \cdot 4^2} = 5,7 \text{ м}.$$

Коефіцієнт витрати

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} = \frac{1}{\sqrt{1+2,3}} = 0,55.$$

Приведений напір витікання води через насадку

$$H_{\text{пр}} = \frac{\Delta p}{\rho_e g} + a = \frac{p_{\text{атм}} + \rho g H - p_{\text{атм}}}{\rho_e g} + a = \frac{\rho}{\rho_e} H + a.$$

Тоді час витікання шару товщиною a буде

$$t = \frac{2D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \int_0^a \frac{da}{\left(a + \frac{\rho}{\rho_e} H \right)^{1/2}} = \frac{2D^2 \left(\sqrt{a + \frac{\rho}{\rho_e} H} - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_e} H} \right)}{\mu d^2 \sqrt{2g}}.$$

Після підстановки числових даних отримаємо

$$t = \frac{2 \cdot 4^2 \left(\sqrt{8 \cdot 10^{-2} + 0,84 \cdot 5,7} - \sqrt{0,84 \cdot 5,7} \right)}{0,55 \cdot 0,05^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 105 \text{ с}.$$

6.7 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Які отвори вважають малими?
- 2) Чим обумовлено стиснення струмини?
- 3) Як пов'язані між собою коефіцієнти швидкості φ , витрати μ , стиснення струменя ε і місцевого опору ξ ?
- 4) В якому випадку стиснення струменя буде неповним, недосконалим?
- 5) Чи залежить витрата та швидкість від розташування затопленого отвору по висоті?
- 6) Який вплив має в'язкість рідини на витікання через отвори і насадки?
- 7) Як змінюється витрата при витіканні рідини через циліндричну насадку в порівнянні з витіканням її через круглий отвір такого ж діаметру і з таким самим напором?
- 8) Як змінюється кінетична енергія струменя і витрата при витіканні рідини через конфузорну і дифузорну насадки?
- 9) В чому полягають особливості витікання рідини через великий отвір у порівнянні з витіканням її через малий отвір?
- 10) Чи може відбуватися випорожнення посудини зі сталою витратою? Що для цього потрібно?

Контрольні тестові завдання

1. Що буде з витратою рідини, якщо замінити конічно-розбіжну насадку циліндричною? При цьому вихідні діаметри однакові:

- а) збільшиться;
- б) зменшиться;
- в) залишиться без змін.

2. Якою з наведених нижче залежностей виражають коефіцієнт швидкості?

а) $\varphi = \sqrt{1 + \xi}$; б) $\varphi = \sqrt{1 + \frac{1}{\xi}}$; в) $\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \xi}}$;

де ξ — сумарний коефіцієнт місцевих опорів.

3. За якою формулою визначають теоретичну витрату при витіканні рідини із насадки?

а) $Q = \mu\pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gH}$;

б) $Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH}$.

в) $Q = \varepsilon\varphi \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH}$.

4. У випадку отворів однакової форми і однакових розмірів площа стисненого перерізу при недосконалому стисненні завжди:

- а) більша від площі стисненого перерізу при досконалому стисненні;
- б) менша від площі стисненого перерізу при досконалому стисненні;
- в) рівна площі стисненого перерізу при досконалому стисненні.

5. Що буде з витратою рідини якщо замінити циліндричну насадку круглим отвором? При цьому вихідні діаметри однакові.

- а) збільшиться;
- б) зменшиться;
- в) залишиться без змін.

7 ГІДРАВЛІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ТРУБОПРОВІДІВ

7.1 Призначення та класифікація трубопроводів

Трубопроводи є гідротехнічними спорудами, по яких транспортуються різні рідини та гази на великі і малі відстані. Використовують трубопроводи в різних контрольно-вимірювальних приладах, апаратах та гідравлічних системах, а так звані магістральні трубопроводи служать для транспортування води, нафти, нафтопродуктів, газів на великі відстані. Останні є складними гідравлічними спорудами довжиною в сотні кілометрів і мають, як правило, велику пропускну здатність.

При гідравлічних розрахунках залежно від геометричної конфігурації слід розрізняти трубопроводи: прості і складні, короткі і довгі, тупикові і замкнуті, з транзитною та шляховою витратою.

Простим називається трубопровід постійного поперечного перерізу, що не має розгалужень. Складний трубопровід виконується з труб різних діаметрів або має відводи та розгалуження. Складні трубопроводи поділяють на такі основні види:

- паралельно сполучені, які мають дві і більше паралельних віток (рис. 7.1, а);
- послідовно сполучені, що змонтовані з ділянок різних діаметрів (рис. 7.1, б);
- розгалужені (тупикові), в яких рідина з магістралі потрапляє в бокові відводи (рис 7.1, в);

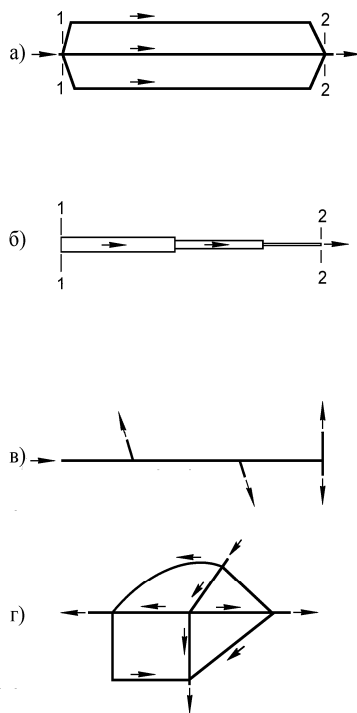


Рисунок 7.1 — Схеми складних трубопроводів

- кільцеві, що являють собою замкнуті гідравлічні мережі, якими рідина в задану точку подається по двох і більше лініях (рис. 7.1, г).

Залежно від співвідношення величини втрат напору на місцеві опори і за довжиною розрізняють довгі і короткі трубопроводи.

Короткими називають трубопроводи, в яких втрати напору в місцевих опорах близькі за величиною до втрат напору по довжині, тобто мають однаковий порядок. При гідравлічному розрахунку таких трубопроводів вираховують обидва види втрат напору і сумують їх. Прикладами коротких трубопроводів можуть бути всмоктувальні лінії насосів, територіальні трубопроводи нафтобаз, насосних станцій тощо.

Довгими є трубопроводи, в яких втрати напору в місцевих опорах складають не більше 5...8 % від втрат напору по довжині. Такими є саме магістральні трубопроводи. При розрахунку таких трубопроводів втрати напору в місцевих опорах не обчислюють, а враховують відповідним коефіцієнтом α

$$h = \alpha h_{\text{мер}},$$

де h — сумарні втрати напору; $\alpha \leq 1,05 \dots 1,08$ — коефіцієнт, що враховує втрати напору на місцевих опорах;

$h_{\text{мер}}$ — втрати напору на тертя по довжині трубопроводу.

Трубопроводи можуть бути з транзитною витратою, коли витрата рідини по всій довжині трубопроводу залишається постійною, і трубопроводи зі шляховою витратою, коли витрата по довжині змінна внаслідок відбору рідини або підкачування її в окремих точках трубопроводу.

Будемо також розрізняти трубопроводи напірні і безнапірні. В напірних трубопроводах рідина рухається при надлишковому тиску і повністю заповнює весь поперечний переріз. Безнапірні трубопроводи працюють неповним перерізом і характеризуються наявністю вільної поверхні, тиск над якою атмосферний або менший від нього.

Кожен з перелічених вище трубопроводів має свої особливості при гідравлічному розрахунку.

Як б не була трубопровідна система, її можна розбити на окремі ділянки так, що кожна з них окремо буде простим трубопроводом. Тому в основі гідравлічного розрахунку складних трубопроводів є методика розрахунку простого трубопроводу.

7.2 Основні задачі розрахунку трубопроводів

При гідравлічному розрахунку трубопроводів розв'язують такі основні задачі:

Задача 1. Визначення необхідного напору (тиску) на початку трубопроводу $H(p)$ при відомих його геометричних розмірах (внутрішній діаметр d , довжина l) витраті Q , фізичних параметрів рідини (в'язкості і густини). Відомий профіль траси (z_1 і z_2), матеріал труб і спосіб їх виготовлення, місцеві опори.

Задача 2. Визначення пропускної здатності трубопроводу Q при відомих його геометричних розмірах (довжині l і діаметрі d), профіль траси (відмітки початкового і кінцевого перерізів трубопроводу z_1 і z_2), початковий і кінцевий тиски p_1 і p_2 або діючий напір H , фізичні параметри рідини (в'язкість і густина), а також матеріал та технічний стан внутрішньої поверхні труби (еквівалентна шорсткість), відомості про місцеві опори.

Задача 3. Визначення необхідного діаметра трубопроводу. Відома його довжина l , матеріал труб (шорсткість), відмітки початку і кінця трубопроводу z_1 і z_2 , витрата Q , початковий і кінцевий тиски (p_1 і p_2) або величина діючого напору H , фізичні параметри рідини.

Задача 4. Визначення оптимального діаметра трубопроводу при заданому плані перекачки (відома витрата рідини Q). Відомі фізичні властивості рідини (в'язкість і густина) і їх залежність від температури, профіль траси (z_1 і z_2) і довжина l , необхідний тиск в кінці трубопроводу z_2 , але невідомий необхідний тиск на початку p_1 .

Перші дві задачі розв'язують для існуючих трубопроводів, що перебувають в експлуатації. Задачі 3-я та 4-а задовольняють умови, що виникають при проектуванні трубопроводів.

7.3 Розрахунок простих трубопроводів

7.3.1 Визначення необхідного тиску на початку трубопроводу

Схема простого трубопроводу з місцевими опорами приведена на рис. 7.2. Рідина рухається по трубопроводу завдяки тому, що її енергія на початку трубопроводу більша, ніж в кінці. Цей перепад (різниця) рівнів енергій може бути створений

тим чи іншим способом: роботою насоса, встановленого на початку трубопроводу; різницею рівнів рідини в резервуарах, підключених на початку і в кінці трубопроводу; тиском газу. В практиці в більшості випадків рух рідини в трубопроводах обумовлений роботою насосів. В деяких спеціальних пристроях використовується газобалонна подача рідини, тобто використовується тиск газу. Рух рідини завдяки різниці рівнів у резервуарах використовується в гідротехніці і водопостачанні.

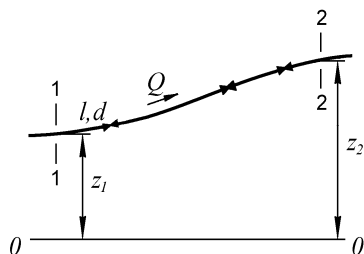


Рисунок 7.2 — Схема простого трубопроводу

Нехай простий трубопровід постійного перерізу ($d = const$), довільно розташований у просторі (див. рис. 7.2), має загальну довжину l і містить ряд місцевих опорів. У початковому перерізі (1-1) геометрична висота рівня z_1 і надлишковий тиск p_1 , а в кінцевому (2-2) — відповідно z_2 і p_2 . Середня швидкість рідини в цих перерізах внаслідок того, що діаметр труби d сталий за довжиною, буде однакова і рівна v .

Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2. Враховуючи умови $\alpha_1 = \alpha_2$ і $v_1 = v_2$ і виключивши швидкісні напори, одержимо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_{1-2} \quad (7.1)$$

або

$$\frac{p_1}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + h_{1-2}. \quad (7.2)$$

П'єзометрична висота в лівій частині рівняння (7.2) є необхідний напір на початку трубопроводу H . Як видно з рівняння (7.2), цей напір витрачається на перепад висот $z_2 - z_1 = \Delta z$, компенсує втрати напору в гідравлічних опорах h_{1-2} і використовується для створення відповідного напору в кінці трубопроводу $H_k = p_2 / \rho g$.

Сума перших двох доданків ($\Delta z + p_2 / \rho g$) є так званий статичний напір і його можна представити як деяку еквівалентну геометричну висоту $H_{cm} = \Delta z + p_2 / \rho g$. Тоді

$$H = H_{cm} + h_{1-2}. \quad (7.3)$$

Виразимо втрати напору в гідравлічних опорах через витрату рідини Q

$$\begin{aligned} h_{1-2} = h_r + h_M &= \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{v^2}{2g} = \\ &= \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Тоді

$$H = H_{cm} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4}. \quad (7.5)$$

Рівняння (7.5) є основним рівнянням для гідравлічних розрахунків трубопроводів.

Якщо місцеві опори замінити еквівалентною довжиною $l_{екв} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \xi_i d$ (див. п. 5.10) і втрати напору в трубопроводі обчислити для розрахункової довжини $l_p = l + l_{екв}$, то рівняння (7.5) набуде вигляду

$$H = H_{cm} + \frac{8\lambda Q^2 l_p}{\pi^2 g d^5}. \quad (7.6)$$

Аналіз формул, що рекомендуються для визначення коефіцієнта гідравлічного опору λ , показує, що більшість їх можна представити узагальненою залежністю (див. п. 4.3.5)

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}^m} = \frac{A v^m}{v^m d^m}, \quad (7.7)$$

де A і m — величини, що залежать від режиму руху і мають різні значення для кожної зони гідравлічного опору (див. табл. 4.5) і

$$h_{1-2} = \beta \frac{Q^{2-m} v^m}{d^{5-m}} l_p, \quad (7.8)$$

$$\text{де } \beta = \frac{4^{2-m} A}{2g\pi^{2-m}}.$$

Тоді рівняння для визначення необхідного напору в трубопроводі має вигляд

$$H = H_{cm} + k \frac{Q^{2-m}}{d^{5-m}}. \quad (7.9)$$

$$\text{Тут} \quad k = \beta v^m l_p. \quad (7.10)$$

Задачі першого типу при визначенні необхідного напору в трубопроводі з метою вибору відповідних насосів при відомих геометричних параметрах трубопроводу, фізичних властивостях перекачуваної рідини і її витраті вирішуються безпосередньо з рівнянь (7.5), (7.6) чи (7.9) при відомому режимі руху рідини.

Приклад 7.1. Виконати гідравлічний розрахунок трубопроводу і підібрати необхідну кількість насосних станцій для перекачування нафти в кількості 8 млн. т за рік. Довжина трубопроводу $l = 425$ км, діаметр $d = 511$ мм, різниця нівелірних позначок кінця та початку трубопроводу $\Delta z = z_2 - z_1 = 12,5$ м. Середня розрахункова в'язкість $\nu_n = 0,55$ см²/с, густина $\rho_n = 878$ кг/м³. Напір однієї насосної станції $H_{cm} = 600$ м вод. ст.

Розв'язок: Розрахункове число днів роботи нафтопроводу протягом року приймаємо рівним 350 днів. Тоді об'ємна витрата нафти

$$Q = \frac{8000000000}{878 \cdot 350 \cdot 24 \cdot 3600} = 0,301 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Середня швидкість течії нафти

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,301}{3,14 \cdot 0,511^2} = 1,47 \text{ м/с}.$$

Режим течії

$$Re = \frac{vd}{\nu_n} = \frac{1,47 \cdot 0,511}{0,55 \cdot 10^{-4}} = 13643 > 2320 \text{ — турбулентний режим.}$$

Для нових сталевих труб еквівалентна шорсткість $\Delta_e = 0,1$ мм.

$$\text{Тоді} \quad Re_1 = \frac{10d}{\Delta_e} = \frac{10 \cdot 511}{0,1} = 51000.$$

Отже, $2320 < Re < Re_1$, що відповідає зоні гідравлічно гладких труб, в якій

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} = \frac{0,3164}{13643^{0,25}} = 0,0293.$$

Напір, необхідний для роботи трубопроводу

$$H_{\text{необ}} = h_{\text{мер}} + h_{\text{мо}} + \Delta z,$$

де
$$h_{\text{мер}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0293 \frac{425 \cdot 10^3}{0,511} \frac{1,47^2}{2 \cdot 9,81} = 2684 \text{ м},$$

$h_{\text{мо}} = 0,01 h_{\text{мер}}$ (приймаємо), $\Delta z = 12,5 \text{ м}$ (згідно з умовою задачі).

Тоді
$$H_{\text{необ}} = 2684 + 27 + 12,5 = 2723,5 \text{ м}.$$

Оскільки напір насосної станції задано у м вод. ст., то здійснюємо його перерахунок з врахуванням густини нафти на основі співвідношення $H_n \rho_n g = H_{\text{ст}} \rho_v g$:

$$H_n = \frac{600 \cdot 1000}{878} = 683,4 \text{ м}.$$

Тоді необхідна кількість насосних станцій

$$n = \frac{H_{\text{необ}}}{H_n} = \frac{2723,5}{683,4} = 3,99.$$

Приймаємо 4 станції.

7.3.2 Визначення пропускної здатності трубопроводу

При визначенні пропускної здатності трубопроводу (задачі 2-го типу) аналітичний розв'язок рівнянь (7.5), (7.6) та (7.9) відносно витрати неможливий, оскільки від її величини залежить режим руху рідини, тобто конкретні значення характеристик β і m . Тому використовують наближені методи розв'язку вищевказаних рівнянь:

- графоаналітичний метод, що ґрунтується на побудові характеристики трубопроводу при наперед прийнятих 4-5 значеннях витрати;
- метод послідовних наближень прийнятої величини λ (наприклад, в межах 0,02...0,035), з наступною перевіркою режиму, його значення і наближенням його величини шляхом осереднення;
- метод перехідних напорів, який полягає в порівнянні наявного напору з перехідними його значеннями;
- метод безрозмірних параметрів.

Метод перехідних напорів найбільш раціональний і передбачає попереднє визначення зони гідравлічного опору шляхом порівняння заданого напору з величинами перехідних напорів, що відповідають межах цих зон ($Re_{кр}$, Re_I і Re_{II}).

Цю методику розробив співавтор даного посібника — М. І. Мердух. У гідравлічній літературі її не описано.

Вирази для обчислення перехідних напорів можуть бути отримані на основі рівняння (7.9) з використанням формул для перехідних чисел Рейнольдса.

Знайдемо вирази перехідних напорів при розв'язанні задач, пов'язаних з визначенням витрати рідини в трубопроводі.

Критична витрата рідини, за якої можлива зміна режиму руху рідини в трубопроводі, визначається співвідношенням

$$Q_{кр} = \frac{\pi d v Re_{кр}}{4} \quad (7.11)$$

де $Re_{кр} = 2320$ — критичне число Рейнольдса.

З врахуванням співвідношення (7.11) і значень $\beta = 4,15$ і $m = 1$ для ламінарного режиму руху (див. табл. 4.5) рівняння (7.9) дістає вигляд

$$H_{кр} = H_{см} + \frac{3,26 l_p v^2 Re_{кр}}{d^3}. \quad (7.12)$$

Для перехідних чисел Рейнольдса в турбулентному режимі

$$Re_I = 10 \frac{d}{\Delta_e}, \quad (7.13)$$

$$Re_{II} = 500 \frac{d}{\Delta_e}. \quad (7.14)$$

Значення перехідних значень витрати будуть відповідно рівні:

$$Q_I = 7,85 \frac{d^2 v}{\Delta_e}, \quad (7.15)$$

$$Q_{II} = 392,5 \frac{d^2 v}{\Delta_e}. \quad (7.16)$$

Виходячи з виразів (7.15) та (7.16) при відповідних значеннях параметрів β і m в рівнянні (7.9) (див. табл. 4.5), перехідні значення напорів на межах зон гідравлічного опору в турбулентному режимі руху рідини будуть визначатися рівняннями

$$H_1 = H_{cm} + 0,91 \frac{l_p v^2}{\Delta_e^{1,75} d^{1,25}}, \quad (7.17)$$

$$H_2 = H_{cm} + 1401,9 \frac{l_p v^2}{\Delta_e^{1,75} d^{1,25}}. \quad (7.18)$$

Порівнянням заданих значень напору H з отриманими в рівняннях (7.12), (7.17) і (7.18) виявляється зона гідравлічного опору, і приймаються відповідні значення коефіцієнтів β і m в рівнянні (7.9), яке розв'язується відносно невідомої величини, а саме — пропускної здатності Q . Для самопливних трубопроводів у всіх приведених вище рівняннях необхідного напору слід прийняти $H_{cm} = -\Delta z$, а величину заданого напору — $H = 0$.

Значний інтерес представляє собою спрощений гідравлічний розрахунок визначення необхідної витрати, який широко використовується в зарубіжній практиці.

Нижче наведемо методику розрахунку.

Для цього використаний безрозмірний параметр

$$\xi = \frac{1}{2} \lambda \text{Re}^2, \quad (7.19)$$

який був запропонований Роузом.

Виразимо безрозмірний параметр ξ через відомі для задачі знаходження витрати величини (втрати тиску, діаметр трубопроводу, довжину трубопроводу та в'язкість нафти). Для цього помножимо чисельник та знаменник виразу для розрахунку втрат тиску на тertia по довжині трубопроводу на Re^2 . Враховуючи, що число Рейнольдса $\text{Re} = 4Q/(\pi d v)$, отримаємо залежність для визначення втрат тиску без використання витрати рідини

$$\Delta p = \rho g h_1 = \rho g \frac{8 \lambda Q^2}{\pi^2 d^5 g} = \frac{1}{2} \lambda \text{Re}^2 \frac{l v^2}{d^3} = \xi \frac{l v^2}{d^3}. \quad (7.20)$$

З формули (7.20) отримаємо вираз для розрахунку параметра ξ у вигляді

$$\xi = \frac{\Delta p d^3}{l v^2 \rho}, \quad (7.21)$$

де Δp — втрати тиску; d — внутрішній діаметр; l — довжина; ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості; ρ — густина.

З іншого боку, виразивши коефіцієнт гідралічного опору через безрозмірний параметр з формули (7.19)

$$\lambda = \frac{2\xi}{\text{Re}^2} \quad (7.22)$$

і підставивши його у формулу Кольбрука (4.93), одержимо залежність для розрахунку числа Рейнольдса при турбулентному режимі течії рідини, яка справедлива при $\text{Re} \geq 4000$:

$$\text{Re} = -\sqrt{8\xi} \lg \left(\frac{\Delta_e}{3,7d} + \frac{2,51}{\sqrt{2\xi}} \right). \quad (7.23)$$

Аналогічно з формули Стокса (4.29) при ламінарному режимі течії рідини

$$\text{Re} = \frac{\xi}{32}. \quad (7.24)$$

Ця залежність справедлива при $\text{Re} \leq 2000$.

Для розрахунку витрати початку розраховуємо параметр ξ за формулою (7.21). Потім за формулами (7.23) і (7.24) розраховуємо числа Рейнольдса і вибираємо з них те, яке відповідає умові використання цих формул ($\text{Re} \leq 2000$ чи $\text{Re} \geq 4000$). Якщо жодна з формул не підходить, то течія відбувається в перехідній зоні і витрата рідини невизначена.

Шукане значення витрати знаходимо з використанням вибраного числа Re із залежності

$$Q = \frac{\pi}{4} \nu d \text{Re}. \quad (7.25)$$

Приклад 7.2. Визначити витрату рідини в трубопроводі діаметром $d = 200$ мм і довжиною $l = 10$ км при напорі на початку трубопроводу $H = 60$ м. Коефіцієнт кінематичної в'язкості в умовах роботи трубопроводу $\nu = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Еквівалентна шорсткість внутрішньої поверхні труб $\Delta_e = 0,02$ мм. Статичний напір $H_{cm} = 0$.

Розв'язок: За рівнянням (7.12) знаходимо:

$$H_{кр} = \frac{3,26l\nu^2 \text{Re}_{кр}}{d^3} = \frac{3,26 \cdot 10^4 (6 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2320}{0,2^3} = 0,034 \text{ м}.$$

Оскільки $H > H_{кр}$, то рух рідини відбувається в турбулентному режимі. Згідно з рівнянням (7.17) маємо:

$$H_1 = 0,91 \frac{l v^2}{\Delta_e^{1,75} d^{1,25}} = 0,91 \frac{10^4 (6 \cdot 10^{-6})^2}{(0,02 \cdot 10^{-3})^{1,75} \cdot 0,2^{1,25}} = 489 \text{ м.}$$

Оскільки $H_{кр} < H < H_1$, то в даному випадку є зона гладкостінного тертя, для якої $\beta = 0,0247$; $m = 0,25$ (див. табл. 4.5). На підставі (7.9) та (7.10) маємо:

$$Q = \left(\frac{H d^{5-m}}{\beta v^m l} \right)^{\frac{1}{2-m}} = \left(\frac{60 \cdot 0,2^{4,75}}{0,0247 \cdot (6 \cdot 10^{-6})^{0,25} \cdot 10^4} \right)^{\frac{1}{1,75}} = 0,0315 \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 31,5 \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

7.3.3 Визначення необхідного діаметра трубопроводу

При визначенні діаметра трубопроводу (задачі 3-го типу, як і при визначенні пропускної здатності, невідомий режим руху, тому можливий один із чотирьох вказаних вище методів наближення розв'язку.

При використанні методу перехідних напорів необхідно спочатку встановити зону гідравлічного опору шляхом визначення перехідних напорів

$$H_{кр} = H_{cm} + 1,58 \frac{l_p v^5 \text{Re}_{кр}^4}{Q^3}, \quad (7.26)$$

$$H_1 = H_{cm} + 3,29 \frac{l_p v^{2,625}}{\Delta_e^{2,375} Q^{0,625}}, \quad (7.27)$$

$$H_2 = H_{cm} + 5,86 \cdot 10^4 \frac{l_p v^{2,625}}{\Delta_e^{2,375} Q^{0,625}}. \quad (7.28)$$

Ці рівняння виведені згідно з методикою, поданою в попередньому параграфі (формули (7.11)-(7.18)).

Для визначення зони гідравлічного опору порівнюють наявний напір ($p_1/\rho g$) на початку трубопроводу з обчисленими за рівняннями (7.26), (7.27), (7.28) величинами перехідних напорів, приймають відповідні встановленій зоні значення β і m і з формули (7.9) враховують необхідний діаметр трубопроводу.

7.3.4 Графоаналітичний метод гідравлічного розрахунку трубопроводу

При визначенні пропускної здатності трубопроводу за допомогою графоаналітичного методу будують графік залежності напору від витрати рідини $H = f(Q)$ з використанням рівняння (7.6) або (7.7). Для цього задають 4-5 значень витрати з розрахунку, щоб необхідна нам величина Q була в цьому діапазоні (від нульового до максимального значення, яке може бути досягнуте реально в трубопроводі при середній швидкості течії (0...7) м/с, що найчастіше буває в практиці). За значенням Q визначають режим руху, визначається зона гідравлічного опору, і вибирається відповідна формула для визначення коефіцієнта λ або ж відповідні значення величин β і m . З рівняння (7.6) або (7.9) обчислюють значення напорів і в координатах $H-Q$ будується графік (рис. 7.3). При ламінарному режимі руху ця залежність лінійна, при турбулентному — степенева з показником степеня в межах 1,75...2. Величина H_{cm} буде додатна у тому випадку, коли рідина піднімається на висоту або подається в ємність з надлишковим тиском. Від'ємне значення H_{cm} буде для самопливних трубопроводів або при русі рідини в резервуар з розрідженням (вакуумом). Зміщення ліній на графіку при $Q = Q_{кр}$ (під час переходу від ламінарного режиму в турбулентний) пояснюється деяким розходженням результатів розрахунку λ за формулами Стокса і Блазіуса. Крутизна графіка $H = f(Q)$ залежить від опору трубопроводу і зростає зі збільшенням довжини трубопроводу, зменшенням його діаметра, та місцевих гідравлічних опорів. При ламінарному режимі його крутизна пропорційна в'язкості рідини. Пропускна здатність трубопроводу відповідає величині заданого напору $H_3 = (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) / \rho g$, тобто ординаті H_3 . Горизонтальна лінія, проведена через неї до перетину з кривою $H = f(Q)$ визначає величину розрахункової витрати Q_p (див. рис. 7.3).

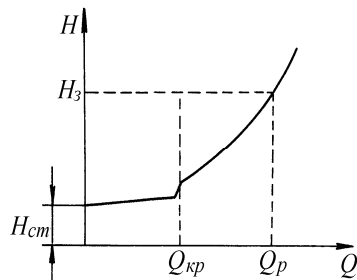


Рисунок 7.3 — Залежність напору від витрати рідини в трубопроводі

При визначенні діаметра трубопроводу графоаналітичним методом необхідно побудувати графік $H = f(d)$ для різних 4-5 значень діаметрів, вибраних таким чином, щоб невідомий діаметр d_p був в межах $d_1 < d_p < d_5$. Для кожного з них визначається режим руху, перехідні числа Рейнольдса, встановлюється зона гідравлічного опору і вираховуються за відповідними формулами значення коефіцієнтів гідравлічного опору λ . Із рівняння (7.6) визначають відповідні значення напорів і будують в координатах H - d графік, приведений на рис. 7.4. Розрахункове значення діаметра d можна знайти як абсцису точки перетину кривої $H = f(d)$ з проведеною через величину заданого напору горизонтальною прямою $H_3 = \text{const}$.

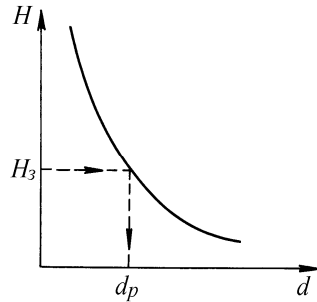


Рисунок 7.4 — Залежність напору від діаметра трубопроводу

Графоаналітичний метод ефективний і його доцільно застосовувати при розв'язуванні великої кількості однотипних задач для одного і того ж трубопроводу.

Наведемо спрощений метод гідравлічного розрахунку для визначення необхідного діаметра трубопроводу.

Використаємо безрозмірний параметр

$$\beta = \sqrt{\lambda \text{Re}^5}. \quad (7.29)$$

Визначимо втрати тиску на тертя по довжині трубопроводу, за формулою Дарсі-Вейсбаха (4.27), виразивши в ній швидкість руху рідини через витрату. Помножимо чисельник та знаменник даного виразу на Re^5 . Враховуючи, що число Рейнольдса $\text{Re} = 4Q/(\pi d v)$, отримаємо:

$$\Delta p = \rho g h_1 = \frac{8\rho\lambda Q^2}{\pi^2 d^5} = \lambda \text{Re}^5 \frac{\pi^3 l v^5 \rho}{128 Q^3}, \quad (7.30)$$

де ρ — густина рідини; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; l — довжина трубопроводу; Q — об'ємна витрата; d — внутрішній діаметр; Re — число Рейнольдса; v — кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Із формули (7.29) із врахуванням (7.30) одержано значення безрозмірного параметра, який залежить від перепаду тиску, витрати та в'язкості рідини, але не від діаметра:

$$\beta = \sqrt{\frac{128\Delta p Q^3}{\pi^3 l v^5 \rho}}. \quad (7.31)$$

Формула Кольбука (4.93) з урахуванням формули (7.31) зведена до виду:

$$\text{Re}^{0,25} = -2\beta \lg\left(\frac{\Delta_e \pi v}{14,8Q} \text{Re} + \frac{2,51}{\beta} \text{Re}^{1,5}\right), \quad (7.32)$$

число Рейнольдса за якою можна визначити лише методом ітерацій. Ця залежність справедлива при $\text{Re} \geq 4000$.

Оскільки перекачування нафти по трубопроводу відбувається в основному при турбулентному режимі в зоні гідравлічно гладких труб, то в такому випадку залежність (7.32) для визначення числа Рейнольдса спрощується до вигляду:

$$\text{Re} \approx 1,43\beta^{0,416}. \quad (7.33)$$

Ця формула може також бути використана як перше наближення для розрахунку числа Рейнольдса за формулою (7.32) методом ітерацій.

У випадку ламінарної течії при $\text{Re} \leq 2000$ отримують формулу для визначення числа Рейнольдса у вигляді:

$$\text{Re} = \sqrt{\frac{\beta}{8}}. \quad (7.34)$$

Вибравши число Рейнольдса, яке відповідає області використання формули, за якою його знайшли, розраховують необхідний діаметр трубопроводу за формулою

$$d = \frac{4Q}{\pi \text{Re} v} \quad (7.35)$$

7.3.5 Визначення оптимального діаметра трубопроводу

При проектуванні нових трубопроводів у більшості випадків розрахунки зводяться до визначення діаметра трубопроводу і необхідного напору (4-й тип задач), тому виникає ціла

множина розв'язків таких задач, оскільки (при інших рівних умовах) діаметр трубопроводу і необхідний напір — це взаємопов'язані параметри: чим менший діаметр, тим більші втрати напору, а значить, і необхідний напір буде більший, і навпаки, на трубопроводі більшого діаметра необхідний напір буде менший, оскільки меншими будуть втрати напору. У зв'язку з цим при розв'язуванні задач такого типу виходять з вимог оптимальності і техніко-економічної доцільності спорудження та експлуатації трубопроводу.

При менших діаметрах потрібні будуть значно менші капітальні затрати на спорудження трубопроводу, ніж при великих. Вартість труб, обсяг земляних робіт і робіт з укладки труб тим нижчі, чим менший діаметр. Проте зменшення діаметра трубопроводу приводить до збільшення втрат напору і, значить, до збільшення потужності насосів та двигунів. Найбільш економічно вигідний діаметр (оптимальний діаметр) повинен відповідати найменшій загальній вартості трубопроводу, яка визначається капітальними затратами на спорудження і прокладку самого трубопроводу, а також затратами на спорудження насосних станцій і їх експлуатацію.

Для визначення економічно найбільш вигідного діаметра існує ряд методів, які вивчаються в спеціальних курсах з проектування і спорудження трубопроводів. В основі цих методів лежать відповідні техніко-економічні розрахунки. Для цього складається рівняння для повної річної вартості трубопроводу, включаючи як капітальні затрати на його спорудження і прокладку, так і експлуатаційні витрати, виражені в функції від діаметра трубопроводу. Потім знаходять мінімум цієї функції, для чого беруть першу похідну від вартості по діаметру і прирівнюють її до нуля. Із отриманого таким чином рівняння визначають оптимальний діаметр трубопроводу, що відповідає мінімуму його повної вартості.

Значення оптимального діаметра може бути визначено також графічним методом. При цьому по осі абсцис (рис. 7.5) відкладають діаметри трубопроводів d , а по осі ординат —

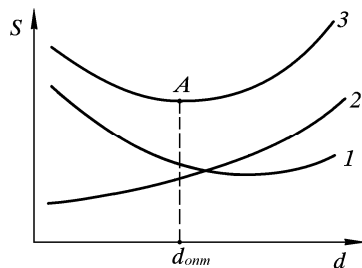


Рисунок 7.5 — Залежність капітальних затрат та експлуатаційних витрат від діаметра трубопроводу

відповідну цим діаметрам вартість S : капітальні затрати (крива 2) і експлуатаційні витрати, з врахування терміну окупності трубопроводу (крива 1). Сумуючи ординати цих кривих, знаходять загальну вартість спорудження і експлуатації трубопроводу (крива 3). Ця залежність має мінімум в деякій точці A , яка і визначає оптимальний діаметр d_{opt} . Розрахунки показують, що найбільш вигідний в економічному відношенні діаметр відповідає середній швидкості руху рідини в трубопроводі, близькій до 1 м/с.

Після того як визначено оптимальний діаметр, вибирають його стандартне значення і за рівняннями (7.6) або (7.9) визначають для прийнятого стандартного значення діаметра труб необхідний напір.

7.4 Розрахунок складних трубопроводів

7.4.1 Послідовне з'єднання трубопроводів

Схему послідовного з'єднання трьох трубопроводів подано на рис. 7.1, б. Очевидно, що при русі рідини по такому трубопроводу витрата рідини на всіх послідовно з'єднаних трубопроводах буде одна і та ж, а загальні втрати напору на всій довжині трубопроводу між початковим і кінцевим перерізами 1-1 і 2-2 рівні сумі втрат напору на всіх послідовно з'єднаних трубах, тобто маємо такі основні рівняння

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q = idem, \quad (7.35)$$

$$h_{1-2} = h_1 + h_2 + h_3. \quad (7.36)$$

Оскільки внаслідок різниці діаметрів в перерізі 1-1 і 2-2 будуть різні швидкості в цих перерізах, то вираз необхідного напору для всього трубопроводу повинен містити ще й різницю швидкісних напорів в кінці і на початку трубопроводів

$$H = H_{cm} + h_{1-2} + \frac{\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g}. \quad (7.37)$$

Проте в більшості випадків третій доданок в (7.37) значно менший перших двох і ним можна знехтувати.

Тому необхідний напір на всьому трубопроводі буде складатись із напорів на окремих ділянках

$$H = H_1 + H_2 + H_3. \quad (7.38)$$

Рівняння (7.35)-(7.36) визначають правило побудови графіка $H = f(Q)$ при послідовному з'єднанні труб.

Для цього треба спершу побудувати такі графіки для кожного з трубопроводів окремо (криві 1, 2, 3 на рис. 7.6) і при однакових значеннях витрати Q просумувати напори H_1, H_2, H_3 , тобто просумувати графіки по осі ординат.

Отримана таким чином крива 4 буде графіком $H = f(Q)$ для сукупності послідовно з'єднаних трубопроводів і може бути використана для розв'язку задач гідравлічного розрахунку таких трубопроводів.

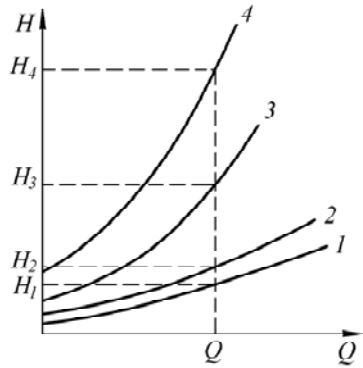


Рисунок 7.6 — Побудова залежності $H = f(Q)$ для послідовно з'єднаних трубопроводів

7.4.2 Паралельне з'єднання трубопроводів

Таке з'єднання трьох простих трубопроводів в перерізах 1-1 і 2-2 показано на рис. 7.1, а.

При паралельному з'єднанні загальна витрата рідини в системі Q буде складатись з витрат рідини на кожній із паралельних віток

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (7.39)$$

Оскільки напори в перерізах 1-1 для кожного з трубопроводів рівні і так само рівні в перерізах 2-2, то і необхідні напори в кожній із віток будуть рівні

$$H_1 = H_2 = H_3 = H = idem. \quad (7.40)$$

А це означає, що і втрати напору в гідравлічних опорах на кожному із трубопроводів рівні

$$h_1 = h_2 = h_3 = h = idem. \quad (7.41)$$

Вирівнювання втрат напору в системі паралельних трубопроводів відбувається внаслідок відповідного перерозподілу витрати Q на окремих вітках.

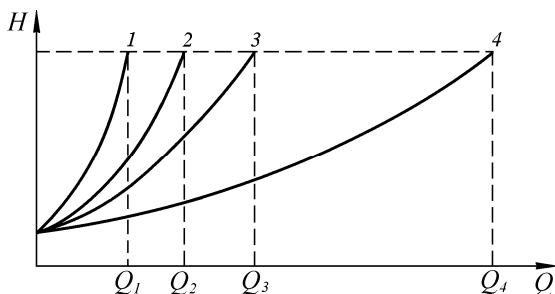


Рисунок 7.7 — Побудова залежності $H = f(Q)$ при паралельному з'єднанні трубопроводів

Для побудови гідравлічної залежності $H = f(Q)$ паралельного з'єднання декількох трубопроводів необхідно спочатку побудувати такі залежності для окремо взятих трубопроводів (криві 1, 2, 3 на рис. 7.7) і просумувати абсциси (витрати) цих графіків при однакових ординатах (напорах), тобто просумувати окремі графіки по горизонталі.

Крива 4 внаслідок такої побудови буде відображати залежність $H = f(Q)$ для всієї системи паралельних трубопроводів і може дати розв'язок для поставлених у гідравлічному розрахунку задач.

7.4.3 Розгалужені трубопроводи

На рис. 7.8 показано схему розгалуженого трубопроводу. Трубопровід 1-2 в точці 2 має розгалуження, з якого виходять два трубопроводи 2-3 і 2-4. Якщо розгалужені вітки мають в кінцевих точках однакові тиски і однакові нівелірні висоти (однакові статичні напори), то, незважаючи на те, що вони не сходяться в одній точці, для них поширюються ті ж правила розрахунків, що й для паралельних трубопроводів.

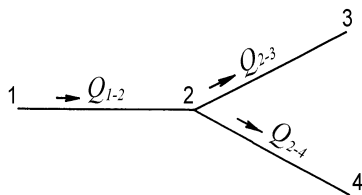


Рисунок 7.8 — Схема розгалуженого трубопроводу

Наприклад, для наведеної на рис. 7.8 схеми будуть мати місце такі рівняння

$$Q_{1-2} = Q_{2-3} + Q_{2-4}, \quad (7.42)$$

$$H_1 = H_2 + \Delta z_{1-2} + h_{1-2}, \quad (7.43)$$

$$H_2 = H_3 + \Delta z_{2-3} + h_{2-3}, \quad (7.44)$$

$$H_2 = H_4 + \Delta z_{2-4} + h_{2-4}. \quad (7.45)$$

В наведеній системі рівнянь втрата напору на окремих ділянках трубопровідної системи h виражається відповідними залежностями (наприклад, формулою Лейбензона), і після цього система розв'язується відносно шуканих параметрів.

При графоаналітичних методах розрахунку розгалужених трубопроводів спершу будують характеристики окремих трубопроводів (рис. 7.9).

Графіки залежностей $H = f(Q)$ для віток 2-3 і 2-4 сумуюмо по осі Q (як при паралельному з'єднанні) і одержимо криву 1, яку з графіком $H = f(Q)$ для трубопроводу 1-2 (крива 1-2) сумуюмо по осі H (як при послідовному з'єднанні). Отримана таким чином крива 2 є графічною залежністю $H = f(Q)$ для всієї системи розгалужених трубопроводів, з якої, наприклад, при заданому напорі в точці 1 — H_1 можна отримати розкладку витрати на ділянках Q_1 , Q_2 , Q_3 , а також напір в точці 2 — H_2 (див. рис. 7.9).

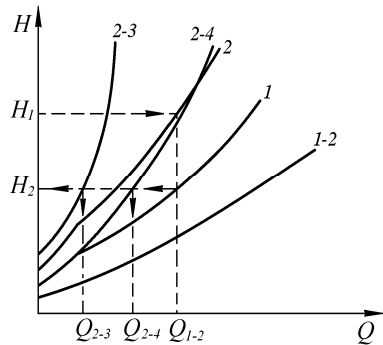


Рисунок 7.9 — Побудова залежності $H = f(Q)$ розгалуженого трубопроводу

7.4.4 Кільцеві (замкнуті) системи трубопроводів

Кільцеві трубопроводи — це система суміжних замкнутих контурів-кілець з відбором рідини у вузлових точках або з безперервною її роздачею на окремих ділянках.

Розглянемо простий випадок, коли трубопровід складається з двох кілець $OABC$ та $ADEB$ (рис. 7.10). Точка O є первинною точкою (вузлом), з якої рідина подається в мережу з витратою Q_1 і де напір має найбільше значення. В точках A , B , C , D і E здійснюється відбір рідини з витратами, які позначені відповідно Q_A , Q_B , Q_C , Q_D і Q_E .

Різні задачі розрахунку і більш складних кільцевих трубопроводів переважно розв'язують аналітичним методом послі-

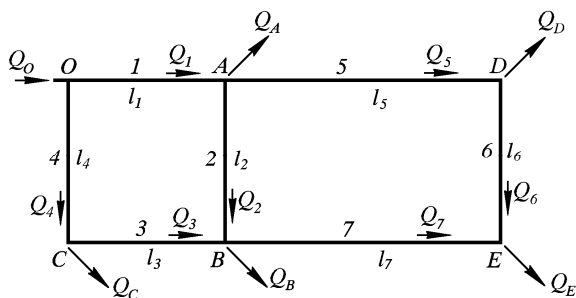


Рисунок 7.10 — Схема кільцевої системи трубопроводів

довних наближень або на ЕОМ з використанням електроаналогії. При цьому спираються на дві обов'язкові умови, які аналогічні вимогам до розрахунку електричних мереж. Перша умова — баланс витрат, тобто рівність притоку і відтоку рідини для кожної вузлової точки, що відповідає першому закону Кірхгофа в електротехніці (сила струму аналогічна витраті). Друга умова — баланс напорів, тобто рівність нулю алгебраїчної суми втрат напору для кожного замкнутого контуру при підрахунку за напрямом руху годинникової стрілки або проти неї, що відповідає другому закону Кірхгофа (падіння напруги аналогічні втратам напору). Втрати напору вважаються додатними, якщо напрям підрахунку співпадає з напрямом руху рідини, і від'ємними, якщо напрям підрахунку протилежний напрямом руху рідини.

Найбільш типовою для розрахунку складних кільцевих трубопроводів є така задача, яку розглянемо на прикладі показаної на рис. 7.10 схеми двокільцевого трубопроводу. Задані: максимальний напір в початковій точці (вузлі) O — H_O , мінімальний напір у найбільш віддаленій точці E — H_E , витрати в усіх шести вузлах (від Q_O до Q_E) і довжини семи ділянок 1-7 (ліній) (від l_1 до l_7). Необхідно визначити діаметри трубопроводів на всіх семи ділянках.

Особливістю даної задачі, як і інших задач розрахунку складних кільцевих трубопроводів, є те, що невідомими будуть витрати на окремих ділянках, в даному прикладі — витрати від Q_1 до Q_7 і напору в чотирьох вузлах A , B , C і D . Таким чином, всього маємо 18 невідомих. Крім того, невідомий напрям руху рідини на другій ділянці (AB).

Для знаходження цих невідомих можна записати такі рівняння: шість рівнянь балансу витрат для шести вузлів; два рівняння балансу напорів для двох кілець (контурів) і сім рівнянь для витрат напору залежно від витрати для кожної з семи ділянок. Таким чином, число рівнянь (15) менше числа невідомих (18), тому для розв'язку задачі в першому наближенні треба задати діаметри деяких ділянок. Найпростіше це зробити для ділянок 6 і 7, по яких рідина подається в кінцеву точку E , оскільки для них відома сумарна витрата $Q_E = Q_6 + Q_7$.

Розв'язок системи рівнянь приходить до виконувати неодноразово не тільки тому, що вибрані діаметри виявились невідальними, але й тому, що остаточно прийняті діаметри труб на всіх ділянках повинні відповідати стандартним.

Зручним розрахунковим прийомом за невеликої кількості кілець є такий. Складний кільцевий трубопровід уявно розривають в найбільш віддаленій точці E і в одній із точок ділянки 2 на два складних розгалужених трубопроводи $OADE$ і $OCBE$. Тоді витрата на ділянці OA буде $\alpha \cdot Q_O$, а на ділянці OC — $(1 - \alpha) \cdot Q_O$. Значення коефіцієнта α можна приблизно оцінити, так як відомі витрати Q_A і Q_D в одному із вказаних трубопроводів і Q_C і Q_B — в другому і невідомі лише Q_6 і Q_7 , з яких складається Q_E .

Далі виконують розрахунок кожного із двох складних розгалужених трубопроводів так, як це було описано вище. Якщо в одному розрахунку визначаються діаметри, то при остаточному їх виборі необхідно добитися рівності витрат напору в лініях $OADE$ і $OCBE$.

7.5 Сифонний трубопровід

Сифонним називається такий самопливний трубопровід, частина якого розташована вище рівня рідини в посудині (резервуарі), з якої рідина надходить в трубопровід (рис. 7.11). Рух рідини в трубі із верхньої посудини в нижню здійснюється завдяки різниці рівнів ΔH , тому умовою роботи сифонного трубопроводу є розташування рівнів рідини в посудинах на різній висоті.

Сифонні трубопроводи (сифони) мають широке використання на практиці. Їх використовують, наприклад, при зливі нафтопродуктів із цистерн, при випорожненні водойм, при прокладці водоводів через підвищення і т. ін.

Для запуску сифона в дію з нього треба попередньо відкачати повітря і створити в ньому необхідний для роботи вакуум. Переважно це досягається шляхом відсмоктування повітря компресором або вакуум-насосом з верхньої частини сифона. Завдяки створеному розрідженню рідина з посудини *A* підніметься по лівій всмоктувальній вітці сифона і перетікає в розташовану нижче посудину *B*.

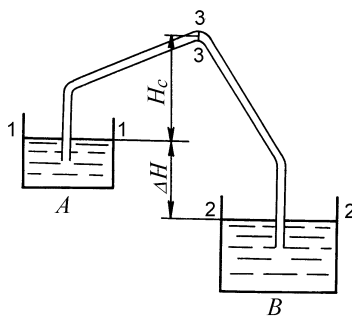


Рисунок 7.11 — Сифонний трубопровід

Гідралічний розрахунок сифонних трубопроводів принципово нічим не відрізняється від розрахунку звичайних самопливних трубопроводів. В основу розрахунку береться рівняння Бернуллі, записане для перерізів 1-1 і 2-2 (див. рис. 7.11). Оскільки тиски на вільних поверхнях рідини в посудинах p_1 і p_2 рівні і співпадають для відкритих посудин з атмосферним тиском, п'єзометричні напори з рівняння Бернуллі виключаються. І так як площі вільних поверхонь рідин в посудинах набагато більші, ніж площа перерізу труби, то швидкісні напори в перерізах 1-1 і 2-2 будуть малі і ними в рівнянні Бернуллі можна знехтувати.

Таким чином, рівняння Бернуллі спрощується і набуває вигляду

$$z_1 - z_2 = h_{1-2}. \quad (7.46)$$

Враховуючи, що $z_1 - z_2 = \Delta H$ і виражаючи втрати напору в сифонному трубопроводі формулою Лейбензона, дістанемо основне рівняння для розрахунку сифонного трубопроводу

$$\Delta H = \beta \frac{Q^{2-m} v^m}{d^{5-m}} l_p, \quad (7.47)$$

на основі якого розв'язуються ті чи інші задачі. Наприклад, витрата рідини буде визначатись за формулою

$$Q = \left(\frac{\Delta H d^{5-m}}{\beta v^m l_p} \right)^{\frac{1}{2-m}}. \quad (7.48)$$

Розрідження, яке виникає в сифонному трубопроводі, викликає виділення із рухомої рідини розчиненого в ній повітря. При значному розрідженні може відбуватись випаровування самої рідини. Тому для нормальної роботи сифонного трубопроводу необхідно, щоб мінімальний тиск в ньому не знижувався до такого тиску, при якому починається виділення парів рідини (тиску насичених парів рідини), інакше їх наявність може призвести до розриву стовпа рідини, а, значить, до зриву роботи сифона. Ця умова обов'язкова для всіх трубопроводів, які працюють при вакуумі, зокрема для всмоктувальних ліній насосних установок.

Виходячи з цієї умови, висота H_c підняття сифонного трубопроводу відносно рівня рідини 1-1 в посудині A обмежена і в кожному окремому випадку повинна визначатись розрахунком. З цією метою запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і найбільш високого перерізу 3-3. Нехтуючи швидкісним напором у перерізі 1-1 і беручи відлік геометричних висот відносно площини, що проходить через переріз 1-1, будемо мати

$$\frac{p_{am}}{\rho g} = H_c + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + h_{1-3}, \quad (7.49)$$

де p_c — абсолютний тиск в найвищому перерізі сифона;

v_c — середня швидкість рідини в сифонному трубопроводі;

h_{1-3} — втрати напору у всмоктувальній ділянці сифонного трубопроводу (до найвищого перерізу), $h_{1-3} = h_{ec}$.

Звідси може бути визначена висота сифонного трубопроводу

$$H_c = \frac{p_{am} - p_c}{\rho g} - \frac{\alpha v_c^2}{2g} - h_{ec}. \quad (7.50)$$

При розрахунках знаходять критичну висоту сифона H_c^{kp} з умови рівності тиску в перерізі 3-3 величині тиску насичених парів рідини ($p_c = p_{н.н.}$):

$$H_c^{kp} = \frac{p_{am} - p_{н.н.}}{\rho g} - \frac{\alpha v_c^2}{2g} - h_{ec}. \quad (7.51)$$

Допустима (монтажна) висота сифонної труби повинна бути менша за H_c^{kp} для забезпечення нормальної роботи сифона.

Приклад 7.3. При сифонному зливанні по трубі ($l = 50$ м, $d = 100$ мм, $\Delta = 0,06$ мм) подається паливо ($\rho = 840$ кг/м³; $\nu = 5,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, тиск насиченої пари $p_{н.п.} = 2$ кПа) при різних позначок рівнів в резервуарах $H_1 = 1,38$ м (рис. 7.12). На зливів є фільтр, два коліна ($a = 90^\circ$ з радіусом повороту $R = 2d$) і вентиль $H_2 = 3$ м; $H_3 = 2$ м. Атмосферний тиск 10^5 Па. Визначити витрату рідини і перевірити умову нормальної роботи сифона.

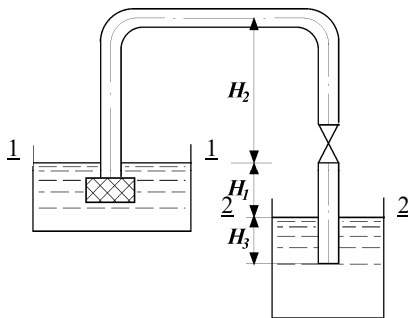


Рисунок 7.12 — До прикладу 7.3

Розв'язок: Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів рідини 1-1 і 2-2 (площина порівняння 2-2)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Проаналізувавши рівняння Бернуллі, одержимо

$$z_1 = H_1; z_2 = 0;$$

$$p_1 = p_{атм}; \quad p_2 = p_{атм};$$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0$$

$$h_{1-2} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g};$$

$$\text{Середня швидкість в трубопроводі } v = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Тоді рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$H_1 = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 d^4 g}.$$

Рідина малов'язка, отже ймовірно, що режим руху турбулентний, тому значення ξ для фільтра коліна, засувки та виходу з труби приймаємо: $\xi_\phi = 1,7$; $\xi_\kappa = 0,23$; $\xi_{зас} = 0,15$; $\xi_{вих} = 1$. Тоді

$$\sum \zeta = \xi_\phi + 2\xi_\kappa + \xi_{зас} + \xi_{вих} = 1,7 + 2 \cdot 0,23 + 0,15 + 1 = 3,31.$$

Розв'язуємо задачу графоаналітичним методом. Задаємося рядом значень Q і визначаємо відповідні їм величини h_{1-2} . Одержані дані заносимо в таблицю:

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	0,004	0,006	0,008	0,010	0,012	0,014
$h_{1-2}, \text{ м}$	0,26	0,54	0,92	1,38	0,93	2,57

Графік $h = f(Q)$ будувати не потрібно, оскільки при $Q = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$
 $h_{1-2} = H_1 = 1,38 \text{ м}$.

Перевіряємо режим течії:

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot 0,01}{3,1416 \cdot 0,1 \cdot 5,5 \cdot 10^{-6}} = 23150 > \text{Re}_{\text{кр}}.$$

Таким чином припущення про турбулентний режим течії було вірним.

Перевіримо виконання умови нормальної роботи сифона, згідно з якою тиск у сифонному трубопроводі повинен бути більшим за тиск насиченої пари рідини. “Небезпечним” перерізом трубопроводу, де тиск буде найменшим, є “живий” переріз в кінці горизонтальної ділянки зливу як найбільш віддалений від початку руху із усіх найбільш піднятих перерізів. Рівняння Бернуллі для перерізів на поверхні рідини у верхньому резервуарі і “небезпечного” має вигляд

$$-H_2 + \frac{p_{\text{амм}} - p_{\text{нб}}}{\rho g} - \frac{\alpha v^2}{2g} = \left[\lambda \frac{l - H_2 - H_3 - H_1}{d} + (\xi_\phi + \xi_\kappa) \right] \frac{v^2}{2g}.$$

Тут $p_{\text{нб}}$ — абсолютний тиск в “небезпечному” перерізі.

Визначимо величини α , v , λ

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,01}{3,1416 \cdot 0,1^2} = 1,273 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{1,273 \cdot 0,1}{5,5 \cdot 10^{-6}} = 23150;$$

$$\frac{10d}{\Delta} = \frac{10 \cdot 100}{0,06} = 16667; \quad \frac{500d}{\Delta} = \frac{500 \cdot 100}{0,06} = 833333.$$

Оскільки $10d/\Delta < \text{Re} < 500d/\Delta$, то коефіцієнт гідравлічного опору визначимо за формулою Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} = 0,11 \left(\frac{0,06}{100} + \frac{68}{23150} \right)^{0,25} = 0,0268.$$

При $\alpha \approx 1$;

$$\begin{aligned} p_{\text{нб}} &= p_{\text{амм}} - \left[H_2 + \left(\lambda \frac{l - H_2 - H_1 - H_3}{d} + \xi_\phi + \xi_\kappa + \alpha \right) \frac{v^2}{2g} \right] \rho g = \\ &= 10^5 - \left[3 + \left(0,0268 \frac{43,62}{0,1} + 1,7 + 0,23 + 1 \right) \frac{1,273^2}{2 \cdot 9,81} \right] \cdot 840 \cdot 9,81 = 65338 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Оскільки $p_{\text{нб}} > p_{\text{нн}}$, то сифонний злив працюватиме.

7.6 Розрахунок насосної установки

Насосні установки можуть бути відкритої і закритої (замкненої) схем подачі рідини. На рис. 7.13 зображена відкрита схема роботи насосної установки.

Висота розташування осі насоса відносно нижнього рівня рідини $H_{вс}$ називається геометричною висотою всмоктування, а трубопровід, по якому рідина надходить до насоса, — всмоктувальним трубопроводом, або лінією всмоктування. Висота розташування верхнього рівня рідини H_n відносно насоса називається геометричною висотою нагнітання, а трубопровід, по якому рідина рухається від насоса, — напірним, або лінією нагнітання.

Розрахунок всмоктувальної лінії проводиться на основі рівняння Бернуллі, записаного для перерізів 0-0 і 1-1, і зводиться в основному до визначення допустимої висоти всмоктування за аналогією з розрахунком висоти сифонного трубопроводу (див. попередній параграф).

Напір насоса при його роботі буде визначатись різницею напорів в перерізах 2-2 і 1-1

$$H_{нас} = H_2 - H_1 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right). \quad (7.52)$$

Напір в перерізі 1-1 (на вході в насос) визначимо з рівняння Бернуллі для всмоктувальної лінії (для перерізів 0-0 і 1-1)

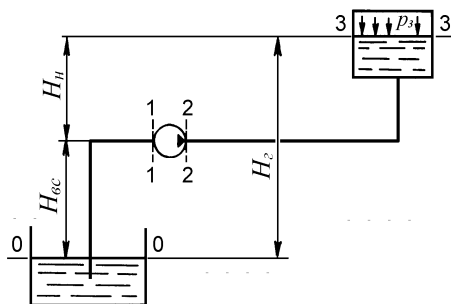


Рисунок 7.13 — Схема насосної установки

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + h_{0-1}. \quad (7.53)$$

Звідси

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} - h_{0-1}. \quad (7.54)$$

Тепер запишемо рівняння Бернуллі для нагнітальної лінії (для перерізів 2-2 і 3-3)

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{2-3} \quad (7.55)$$

Далі, виходячи з рівняння (7.52) і нехтуючи швидкісними напорами в перерізах 0-0 і 3-3, відніmemo відповідно ліві і праві частини рівнянь (7.54) і (7.5)

$$H_{нас} = z_3 - z_0 + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + h_{0-1} + h_{2-3}. \quad (7.56)$$

Як видно з рис. 7.13,

$$z_3 - z_0 = H_{вс} + H_n = H_z.$$

Втрати напору h_{0-1} є втратами напору на всмоктувальній ділянці трубопроводу $h_{0-1} = h_{вс}$, а втрати напору h_{2-3} є втратами в нагнітальному трубопроводі $h_{2-3} = h_n$.

Таким чином,

$$H_{нас} = H_z + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + h_{вс} + h_n. \quad (7.57)$$

Позначимо суму перших двох членів, що складають статичний напір насосної установки, через $H_{ст}$, а суму втрат напору через $\sum h$. Тоді напір насоса

$$H_{нас} = H_{ст} + \sum h. \quad (7.58)$$

Як бачимо, при роботі насоса його напір рівний напору, що необхідний в трубопроводі

$$H_{нас} = H. \quad (7.59)$$

На рівнянні (7.59) базується методика визначення режиму роботи насосної установки. Для цього на одному і тому ж

графіку в координатах $H-Q$ будуть дві криві: крива 1 (рис. 7.14) — графічна залежність необхідного напору H в трубопроводі від витрати Q і крива 2, що відображає характеристику насоса і є графіком напорів, що розвиває насос при різних значеннях подачі рідини. Точка перетину цих кривих (т. A) є робочою точкою, яка визначає параметри режиму роботи насоса і трубопроводу Q_p і H_p , оскільки в цій точці саме виконується умова $H_{нас} = H$.

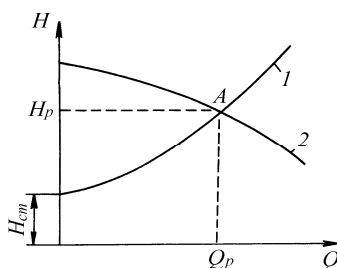


Рисунок 7.14 — Залежність $H = f(Q)$ насоса і трубопроводу

При закритій схемі насосної установки (наприклад, циркуляційні системи примусового водяного обігріву) використовується рівняння (7.56), яке може бути розв'язане тільки при відомій величині статичного напору H_{cm} на рівні осі насоса.

7.7 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Які рівняння застосовують при гідравлічних розрахунках трубопроводів?
- 2) Які трубопроводи називають простими і складними? Різновидності складних трубопроводів.
- 3) Сформулюйте постановку трьох типових задач розрахунку простого трубопроводу.
- 4) Задачі якого типу доцільно вирішувати графоаналітичним способом?
- 5) Яка функція називається гідравлічною характеристикою трубопроводу?
- 6) Як будують гідравлічні характеристики при послідовному і паралельному з'єднанні трубопроводів?
- 7) В чому полягає методика визначення оптимального діаметра трубопроводу?
- 8) Що таке сифонний трубопровід і як проводять його розрахунок?
- 9) Дайте порівняльну характеристику розгалужених трубопроводів і кільцевих (замкнених) систем.
- 10) Як проводять розрахунок трубопроводів з насосною подачею рідини?

Контрольні тестові завдання

1. При послідовному з'єднанні трубопроводів:
 - а) витрата рідини на всіх ділянках однакова;
 - б) необхідні напори на ділянках однакові;

в) статичні напори однакові.

2. При паралельному з'єднанні трубопроводів:

- а) необхідний напір визначається сумою напорів на окремих вітках;
- б) загальна витрата рідини в системі визначається сумою витрат на окремих вітках;
- в) додаються статичні напори на паралельних вітках.

3. Критична висота сифонного трубопроводу визначається за умови:

- а) $p_c = p_n$;
- б) $p_c > p_n$;
- в) $p_c < p_n$.

4. Як визначається статичний напір насосної установки?

а) $H_{cm} = H_z$;

б) $H_{cm} = H_z + \frac{\Delta p}{\rho g}$;

в) $H_{cm} = \frac{\Delta p}{\rho g}$.

5. Як зміняться покази вакуумметра, якщо діаметр всмоктувальної лінії насосної установки збільшиться?

- а) збільшується; б) зменшується; в) не зміниться.

8 НЕУСТАЛЕНИЙ РУХ РІДИНИ В ТРУБАХ

Неусталений рух — це рух під час якого параметри потоку міняються в часі. Неусталений рух рідин буває у всмоктувальних і напірних трубопроводах насосних станцій, обладнаних поршневими насосами, при зупинці чи запуску проміжних магістральних насосних станцій, при раптовій зупинці насосних станцій чи розриві труб, при відборі рідини між насосними станціями і т. п.

У випадку неусталеного руху потік рідини може прискорюватися або гальмуватися, а тому виникає потреба враховувати вплив сил інерції на величину втрат енергії з відповідним знаком: у разі прискорення потоку — з плюсом, у разі гальмування — з мінусом.

8.1 Прямолінійний рух рідини з постійним прискоренням

Розглянемо рівноприскорений рух нестисливої рідини в напірній лінії поршневого насоса (рис. 8.1). Виділимо об'єм рідини між перерізами 1-1 і 2-2, відстань між якими рівна l . Під час руху рідини на виділений об'єм діють такі сили: сила тиску на поверхню виділеного об'єму F_p , сила тертя рідини об стінки труби F_τ , сила ваги рідини G і, оскільки рух відбувається з прискоренням, сила інерції F_{in} .

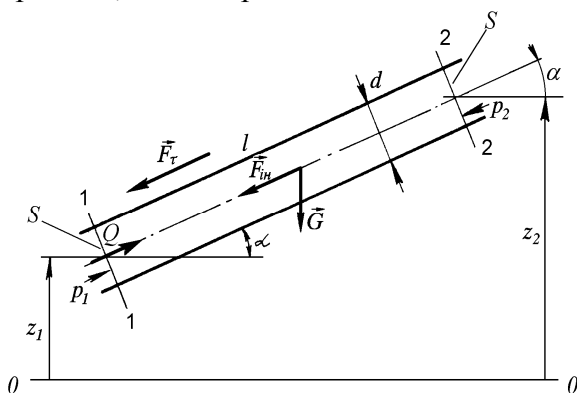


Рисунок 8.1 — Дія сил у випадку рівномірноприскореного руху рідини в трубопроводі

Запишемо рівняння рівноваги сил у проекції на вісь потоку з врахуванням напрямку дії сил:

$$F_p - F_\tau - G \sin \alpha - F_{in} = 0, \quad (8.1)$$

де α — кут нахилу трубопроводу до горизонту.

Проекція сили тиску визначається як

$$F_p = (p_1 - p_2)S, \quad (8.2)$$

де p_1, p_2 — тиск, відповідно, в перерізах 1-1 і 2-2;

S — площа поперечного перерізу труби.

Проекція сили тертя

$$F_\tau = \tau S_{нов} = \tau \pi d l = \tau \frac{Sl}{R_z}, \quad (8.3)$$

де τ — напруження тертя,

$S_{нов} = \pi d l$ — площа внутрішньої поверхні трубопроводу;

$R_z = S/\pi d$ — гідравлічний радіус трубопроводу.

Проекція сили ваги рідини буде рівна

$$G \sin \alpha = mg \frac{z_2 - z_1}{l} = (\rho Sl)g \frac{z_2 - z_1}{l} = \rho g S(z_2 - z_1), \quad (8.4)$$

де $m = \rho Sl$ — маса рідини в трубі між перерізами 1-1 і 2-2;

z_1, z_2 — висота розміщення, відповідно, перерізів 1-1 і 2-2 відносно площини порівняння 0-0.

Проекція сили інерції

$$F_{in} = ma = (\rho Sl)a. \quad (8.5)$$

де a — прискорення руху рідини.

З врахуванням формул (8.2)-(8.5) рівняння (8.1) набуде вигляду:

$$(p_1 - p_2)S - \tau \frac{Sl}{R_z} + \rho g S(z_1 - z_2) - (\rho Sl)a = 0. \quad (8.6)$$

Розділимо всі члени рівняння (8.6) на $\rho g S$. Тоді

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} - \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{R_z} + (z_1 - z_2) - \frac{a}{g} l = 0. \quad (8.7)$$

Перепишемо рівняння (8.7) у такому вигляді:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{R_2} + \frac{a}{g} l. \quad (8.8)$$

Дане рівняння описує неусталений рух з постійним прискоренням нестисливої рідини в трубі постійного перерізу. Якщо врахувати те, що для такої труби різниця швидкісних напорів рівна нулю $((v_1^2 - v_2^2)/2g = 0)$, то ліва частина в рівнянні (8.8) є різницею повних гідравлічних напорів рідини у вибраних перерізах, а права — сумою втрат напору на тертя по довжині труби

$$h_{\text{тер}} = \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{R_2} \quad (8.9)$$

і напору, що іде на подолання дії сили інерції, який називають інерційним напором

$$h_{\text{ин}} = \frac{a}{g} l. \quad (8.10)$$

Величина інерційного напору $h_{\text{ин}}$ може бути як додатна, у випадку рівноприскореного руху, так і від'ємна, якщо рух рівносповільнений, оскільки тоді прискорення у формулу (8.10) підставляють зі знаком “мінус”. А це означає, що у другому випадку повний напір рідини завдяки гальмуванню буде збільшуватися на величину $h_{\text{ин}}$.

Як відомо, втрати напору на тертя по довжині труби можна розрахувати за формулою Дарсі

$$h_{\text{тер}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (8.11)$$

Прирівняємо праві частини формул (8.9) і (8.11) і, враховуючи те, що для круглої труби її діаметр $d = 4R_2$, виразимо з отриманої рівності λ

$$\lambda = \frac{4\tau}{\rho \frac{v^2}{2}}. \quad (8.12)$$

З формули (8.12) зрозумілий фізичний зміст коефіцієнта гідравлічного опору: це є відношення початкового напруження тertia до величини динамічного тиску. Отже, при зростанні останнього коефіцієнт гідравлічного опору зменшуватиметься.

Приклад 8.1. Поршневий насос односторонньої дії подає воду на відстань $l = 200$ м трубопроводом діаметром $d = 100$ мм з витратою $Q = 20$ л/с (рис. 8.2). Кутова швидкість обертання вала кривошипно-шатунного приводу насоса становить $\omega = 0,5$ рад/с. Визначити максимальне значення інерційного напору в трубопроводі.

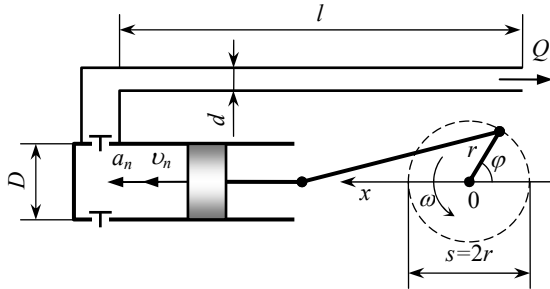


Рисунок 8.2 — Подача рідини в трубопровід поршневим насосом

Розв'язок: Миттєва швидкість руху поршня насоса з кривошипно-шатунним приводом (див. рис. 8.2) описується рівністю:

$$v_n = r\omega \sin \varphi,$$

де r — радіус кривошипа; φ — кут миттєвого положення кривошипа.

Тоді прискорення руху поршня

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = r\omega^2 \cos \varphi.$$

Згідно рівняння нерозривності, швидкість руху рідини в трубопроводі і швидкість руху поршня пов'язані між собою співвідношенням:

$$vd^2 = \eta_o v_n D^2,$$

де η_o — об'ємний к.к.д. насоса; D — діаметр поршня.

Тоді прискорення руху рідини в трубопроводі

$$a = \frac{dv}{dt} = \eta_o \frac{D^2}{d^2} \frac{dv_n}{dt} = \eta_o \frac{D^2}{d^2} a_n = \eta_o \frac{D^2}{d^2} r\omega^2 \cos \varphi.$$

З врахуванням того, що хід поршня $s = 2r$, інерційний напір в трубопроводі за формулою (8.10)

$$h_m = \eta_o \frac{D^2}{d^2} \frac{s\omega^2}{2g} l \cos \varphi.$$

Середня подача поршневого насоса односторонньої дії, зображеного на рис. 8.2, визначається за формулою

$$Q = \eta_o \frac{\pi D^2}{4} \frac{sn}{60},$$

де $n = 30\omega/\pi$ — частота обертання вала кривошипа, об/хв.

З врахування цього інерційний напір буде рівний

$$h_{in} = \frac{4Q}{d^2} \frac{\omega}{g} l \cos \varphi.$$

Максимальне значення інерційного напору буде у випадку максимального прискорення, коли $\varphi = 0$:

$$h_{in} = \frac{4Q}{d^2} \frac{\omega}{g} l = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{0,1^2 \cdot 9,81} 200 = 81,55 \text{ м.}$$

Відповідь: Максимальне значення інерційного напору $h_{in} = 81,55 \text{ м.}$

8.2 Обертання потоку навколо вертикальної осі

Нехай потік довільної форми (рис. 8.3), обмежений перерізами 1-1 і 2-2, обертається з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі Oz . Радіуси r_1 і r_2 — це віддалі центрів вказаних перерізів від осі обертання. При обертанні потоку на нього діє сила інерції, яка рівна відцентровій силі зі зворотним знаком. Для одиниці ваги рідини сила інерції буде рівна $(\omega^2/g)r$. Робота цієї сили на шляху dr рівна $-(\omega^2/g)r dr$. При переміщенні рідини від r_1 до r_2 напір рідини зміниться на величину інерційного напору

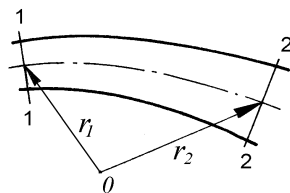


Рисунок 8.3 — До визначення інерційного напору при повороті потоку

$$h_{in} = -\frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2). \quad (8.13)$$

8.3 Гідравлічний удар у трубах

Гідравлічним ударом називають різке підвищення (пониження) тиску, яке виникає в напірних трубопроводах внаслідок раптової зміни швидкості руху рідини після швидкого закриття (відкриття) запірної арматури чи зупинки насосів. У випадку підвищення тиску гідравлічний удар називають додатнім, а у випадку пониження (наприклад, внаслідок відкриття засува) — від'ємним. Особливо небезпечним є гідравлічний удар у магістральних трубопроводах, якими транспортують великі маси рідини з великими швидкостями.

Розглянемо процес виникнення гідравлічного удару в горизонтальному трубопроводі, в який рідина подається з резервуара під тиском $p_0 = \rho g H$ і в якому вона рухається з середньою швидкістю v (рис. 8.4). Після раптового закриття засува в перерізі 1-1 потік зупиняється і його кінетична енергія перетворюється в потенціальну енергію, внаслідок чого тиск перед засувом підніметься на величину Δp . За час dt рідина стиснеться в об'ємі $(S dx)$ між перерізами 1-1 і 2-2 і одночасно в цій зоні стінка труби деформується на величину Δr . Зона стисненого об'єму рідини з часом швидко поширюється і переріз 2-2, який розміщено на границі стисненого об'єму рідини, рухатиметься до початку трубопроводу з швидкістю розповсюдження в рідині зони пружної деформації, з так званою швидкістю ударної хвилі, яка відповідає швидкості звуку в даному середовищі. Коли ударна хвиля досягне початкового перерізу 0-0 вся рідина в трубі зупиниться і буде перебувати під тиском $(p_0 + \Delta p)$ значно більшим від початкового тиску p_0 , після чого почнеться зворотна течія рідини в середовище з меншим тиском, тобто з трубопроводу в резервуар, яка буде супроводжу-

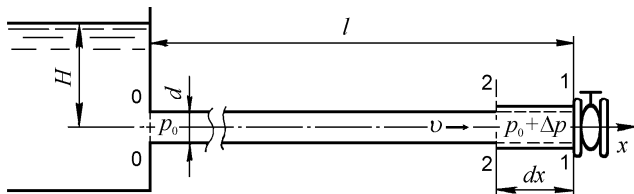


Рисунок 8.4 — Виникнення гідравлічного удару в трубопроводі

ватися падінням тиску в трубі до початкової величини p_0 . Коли ця зворотна хвиля пониження тиску добіжить до засува тиск у всьому трубопроводі буде рівний p_0 і вся рідина у ньому буде рухатися у зворотному напрямі. Але, оскільки засув закритий, то біля нього тиск продовжить зменшуватися до величини p_{min} . Величина пониження тиску ($p_0 - p_{min}$) може бути майже така, як початкове підвищення тиску Δp , але якщо початковий тиск p_0 близький до атмосферного, то мінімальний тиск у трубопроводі $p_{min} = const$ і буде рівний тиску насичених парів рідини (рис. 8.5). При зниженні тиску на всій ділянці трубопроводу до величини $p_{min} < p_0$ вся рідина зупиниться, і почне рухатися у прямому напрямку, поки тиск у всій трубі знову не відновиться до початкового рівня p_0 . Далі такі цикли підвищення-падіння тиску повторюються знову, але щоразу з дещо меншим підвищенням тиску, оскільки частина енергії рідини буде втрачатися на тертя. Візуально на манометрі в перерізі 1-1 можна буде спостерігати 4-6 згасаючих хвиль коливання тиску все меншої амплітуди.

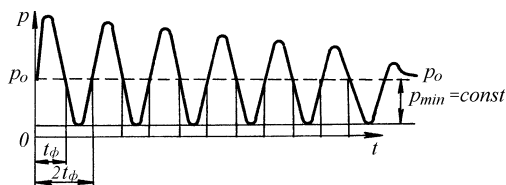


Рисунок 8.5 — Зміна тиску в часі перед засувкою внаслідок гідравлічного удару

Час проходження прямої і зворотної ударної хвилі t_{ϕ} називають фазою гідроудару. Оскільки за цей час ударна хвиля пробігає дві довжини труби l , то

$$t_{\phi} = \frac{2l}{c}, \quad (8.14)$$

де c — швидкість розповсюдження ударної хвилі.

Вперше явище гідравлічного удару експериментально і теоретично було вивчене російським вченим М. Є. Жуковським (1898 р.), а його теорія гідравлічного удару і сьогодні є основою досліджень в цій області.

Для визначення величини підвищення тиску внаслідок явища гідравлічного удару використаємо теорему про кількість руху. Згідно з цією теоремою імпульс сили ($F dt$), що виникне при повній зупинці потоку площею S внаслідок підвищення тиску на величину Δp , і який рівний

$$F dt = \Delta p S dt, \quad (8.15)$$

витрачається на зміну кількості руху рідини масою m в об'ємі ($S dx$)

$$-m \int_v^0 d\nu = \rho(S dx)\nu, \quad (8.16)$$

де ν — швидкість руху рідини до зупинки потоку;

ρ — густина рідини.

Тоді

$$\Delta p S dt = \rho(S dx)\nu. \quad (8.17)$$

Враховуючи, що $dx/dt = c$ — швидкість ударної хвилі, з (8.17) отримаємо формулу для визначення величини підвищення тиску при гідравлічному ударі

$$\Delta p = \rho\nu c, \quad (8.18)$$

яку називають формулою Жуковського.

Для визначення величини підвищення тиску при гідравлічному ударі потрібно знати швидкість поширення ударної хвилі тиску c , яка залежить як від властивостей рідини, так і від матеріалу труби, її діаметра і товщини стінки.

Щоб отримати формулу для розрахунку швидкості c , будемо виходити з припущення, що кінетична енергія потоку під час зупинки витрачається в однаковій мірі на стиснення рідини і на деформацію трубопроводу

$$E_k = E_{cm} + E_{деф}. \quad (8.19)$$

Дане припущення означає, що одна частина енергії гідравлічного удару, яка відповідає підвищенню тиску на величину $\Delta p/2$, іде на виконання роботи зі стиснення рідини E_{cm} , а друга відповідна частина — на виконання роботи з деформації стінок трубопроводу $E_{деф}$.

Визначимо величини, які входять в рівняння (8.19).

Повна кінетична енергія потоку, який рухається зі швидкістю ν , буде рівна

$$E_k = m \frac{\nu^2}{2} = \rho V \frac{\nu^2}{2}, \quad (8.20)$$

де m — маса рідини густиною ρ в трубопроводі об'ємом V .

Енергія стиснення рідини рівна роботі сили тиску F_x в поперечному перерізі трубопроводу S на відстані Δx , яка відповідає зміні об'єму рідини в трубопроводі внаслідок підвищення тиску:

$$E_{cm} = F_x \Delta x = \frac{1}{2} \Delta p S \Delta x = \frac{\Delta p \Delta V}{2}, \quad (8.21)$$

де $\Delta V = S \Delta x$ — зміна об'єму рідини в трубопроводі внаслідок стиснення при збільшенні тиску на величину Δp .

Зміну об'єму рідини ΔV можна визначити через модуль об'ємної пружності рідини K :

$$\Delta V = V \frac{\Delta p}{K}. \quad (8.22)$$

Тоді

$$E_{cm} = V \frac{\Delta p^2}{2K}. \quad (8.23)$$

Енергія деформації стінок труби рівна роботі сили тиску F_r на внутрішню поверхню труби на відстані Δr , яка відповідає радіальній деформації стінок труби внаслідок підвищення тиску:

$$E_{оэф} = F_r \Delta r = \frac{1}{2} \Delta p \cdot 2\pi r l \Delta r = \Delta p \cdot \pi r^2 l \frac{\Delta r}{r} = \Delta p V \frac{\Delta r}{r}, \quad (8.24)$$

де r — радіус трубопроводу; l — довжина трубопроводу.

Згідно з законом Гука, відносна радіальна деформація стінок труби $\Delta r/r$, що виникає внаслідок підвищення тиску в трубі на величину Δp , дорівнює відношенню нормальних напружень у стінці труби σ до модуля Юнга матеріалу стінок труби E :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma}{E}. \quad (8.25)$$

З іншого боку, напруження в стінці труби, що виникли внаслідок підвищення тиску на величину Δp , можна визначити за формулою (див п.2.8.1):

$$\sigma = \frac{\Delta p d}{2\delta}, \quad (8.26)$$

де d — внутрішній діаметр трубопроводу;
 δ — товщина стінки труби.

З врахуванням формул (8.25) і (8.26) залежність для знаходження енергії деформації стінок труби (8.24) матиме вигляд

$$E_{\text{деф}} = V \frac{\Delta p^2 d}{2E\delta}. \quad (8.27)$$

Підставимо рівності (8.20), (8.23) і (8.27) в формулу (8.19)

$$\rho V \frac{v^2}{2} = V \frac{\Delta p^2}{2K} + V \frac{\Delta p^2 d}{2E\delta}. \quad (8.28)$$

Помножимо вираз (8.28) на густину рідини ρ і визначимо з нього величину підвищення тиску Δp :

$$\Delta p = \rho v \left(\frac{\rho}{K} + \frac{\rho d}{\delta E} \right)^{-1/2}. \quad (8.29)$$

Порівнюючи отриманий вираз з формулою Жуковського (8.18), бачимо, що швидкість розповсюдження ударної хвилі c буде рівна

$$c = \left(\frac{\rho}{K} + \frac{\rho d}{\delta E} \right)^{-1/2} \quad (8.30)$$

або

$$c = \frac{\left(\frac{K}{\rho} \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{Kd}{\delta E} \right)^{1/2}}. \quad (8.31)$$

У формулі (8.31) вираз у чисельнику $(K/\rho)^{1/2}$ відповідає швидкості розповсюдження хвиль тиску в однорідному пружному середовищі, яку ще називають швидкістю звуку в рідині. Вираз у знаменнику враховує вплив деформації стінок труби на швидкість поширення ударної хвилі. Оскільки величина знаменника завжди більше 1, то фактична швидкість розпо-

всюдження ударних хвиль тиску в трубопроводі завжди менша від швидкості звуку в необмеженому середовищі.

Для прісної води густиною 1000 кг/м^3 і з модулем об'ємної пружності $K = 2,06 \cdot 10^9 \text{ Па}$ рівність (8.31) набуде вигляду

$$c = \frac{1435}{\left(1 + \frac{Kd}{\delta E}\right)^{1/2}}, \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8.32)$$

Таблиця 8.1 — Середні значення модуля об'ємної пружності деяких рідин (K) за стандартних умов і модуля Юнга для деяких металів (E)

Рідина	K , ГПа	Метал	E , ГПа
гас	1,27	алюміній	68,0
гліцерин	3,92	бронза	118,0
бензин А-95	1,23	дюралюміній	70,0
бензин авіаційний	1,30	латунь	93,0
вода	2,06	мідь	127,0
масло		поліетилен високого тиску	0,8
- АМГ-10	1,30		
- індустриальне 20	1,36	поліетилен низького тиску	0,2
- індустриальне 50	1,47		
- турбінне	1,72	поліпропілен	1,75
нафта	1,28	сталь вуглецева	206,0
ртуть	32,37	сталь легована	216,0
спирт етиловий	1,27	чавун сірий	110,0

Залежно від швидкості перекивання засува (крану) розрізняють прямий і непрямий гідравлічний удар.

Прямий гідравлічний удар виникає, якщо потік зупиняється дуже швидко, так, що час закриття засува не перевищує тривалість фази гідравлічного удару ($t_{\text{зак}} \leq t_{\phi} = 2l/c$). У цьому випадку підвищення тиску Δp сягає свого максимального значення і його розраховують за формулою Жуковського (8.18).

При збільшенні часу закриття засува, коли $t_{\text{зак}} > t_{\phi}$, виникає *непрямий гідравлічний удар*. В цьому випадку величина підвищення тиску зменшується і, в найпростішому випадку, коли степінь закриття засува в часі міняється лінійно, може бути розрахована за формулою

$$\Delta p_{н_2} = \rho v c \frac{t_{\phi}}{t_{зак}} = \frac{2\rho v l}{t_{зак}}. \quad (8.33)$$

Тобто, при збільшенні часу закриття приблизно в такій самій пропорції зменшується сила гідравлічного удару.

Аналіз формули (8.31) показує, що для звичайних сталевих і чавунних водопроводів підвищення тиску внаслідок прямого гідравлічного удару буде пропорційне середній швидкості v , взятій в м/с:

$$\Delta p = (1,0 \dots 1,4)v, \text{ МПа} \quad (8.34)$$

тобто, тиск збільшується на (1,0...1,4) МПа на кожний метр втраченої швидкості. Таке значне підвищення тиску може супроводжуватися розривом труб, тому існує ряд способів попередження або зменшення сили гідравлічного удару.

Перший з них — це таке регулювання часу закриття засува, яке б забезпечило умови виникнення в трубі непрямого гідравлічного удару. Тоді подальше збільшення часу перекривання засува дозволить зменшити величину гідравлічного удару. З формули (8.34) видно, що чим довша ділянка трубопроводу, тим повільніше повинен перекриватися засув для досягнення того ж самого допустимого підвищення тиску в трубопроводі.

Окрім того, на магістральних нафто-, водо-, продуктопроводах на вході і виході з насосних станцій перед лінійними кранами ставлять запобіжні клапани, які спрацьовують при підвищенні тиску вище максимального робочого і закриваються при зниженні тиску в магістралі до нормальної величини. При цьому надлишки рідини на нафто- і продуктопроводах зливаються в спеціальні резервуари.

В коротких трубопроводах, де відбувається неусталений рух рідин порівняно невеликої маси, сила гідравлічного удару гаситься повітряними компенсаторами. Запобігти розриву труб можна також завдяки збільшенню товщини їх стінки на необхідну величину.

Приклад 8.2. Визначити величину підвищення тиску в сталевому водопроводі довжиною $l = 1000$ м, діаметром $d = 100$ мм і товщиною стінки $\delta = 7$ мм, якщо перекриваючий пристрій закривається за час $t_{зак1} = 1$ с і $t_{зак2} = 5$ с. Витрата води до зупинки потоку $Q = 10$ л/с.

Розв'язок: Перш за все, визначимо швидкість течії води в трубі:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,01}{3,14 \cdot 0,1^2} = 1,27 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Визначаємо швидкість поширення ударної хвилі в водопроводі з врахуванням властивостей матеріалу стінок (сталь вуглецева) і води (див табл. 8.1):

$$c = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{Kd}{\delta E}}} = \sqrt{\frac{\frac{2,06 \cdot 10^9}{1000}}{1 + \frac{2,06 \cdot 10^9 \cdot 0,1}{206 \cdot 10^9 \cdot 0,007}}} = 1343 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тоді тривалість фази гідравлічного удару буде рівна:

$$t_\phi = \frac{2l}{c} = \frac{2 \cdot 1000}{1343} = 1,49 \text{ с}.$$

Оскільки ($t_{\text{зак1}} = 1 \text{ с}$) < t_ϕ , то в цьому випадку відбуватиметься прямий гідравлічний удар і підвищення тиску визначаємо за формулою (8.18):

$$\Delta p_1 = \rho v c = 1000 \cdot 1,27 \cdot 1343 = 1705610 \text{ Па} = 1,706 \text{ МПа}.$$

У другому випадку, коли ($t_{\text{зак2}} = 5 \text{ с}$) > t_ϕ , виникає непрямий гідравлічний удар і підвищення тиску знаходимо за формулою (8.34):

$$\Delta p_2 = \frac{2\rho v l}{t_{\text{зак}}} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1,27 \cdot 1000}{5} = 508000 \text{ Па} = 0,508 \text{ МПа}.$$

Відповідь: Підвищення тиску $\Delta p_1 = 1,706 \text{ МПа}$, $\Delta p_2 = 0,508 \text{ МПа}$.

8.4 Гідравлічний таран

Гідравлічний таран — це пристрій, який використовує силу тиску, що виникає внаслідок штучно викликаного гідравлічного удару, для подачі води на деяку висоту (наприклад, у водонапірну башту) Таким чином, гідравлічний таран виконує функцію пульсуючого насоса, який працює автономно, без використання будь-якого зовнішнього приводу, а, значить, не вимагає використання додаткового джерела енергії.

Для роботи гідравлічного тарана (рис. 8.6) необхідно мати постійно діюче джерело води 1, яке забезпечить подачу води в кількості, щонайменше $Q = 0,5 \text{ л/с}$ і можливість створити незначний перепад рівнів рідини h (1 м і більше), щоб підтримувати в трубі довжиною l і діаметром d швидкість течії води близько 1 м/с. Це дозволить при зупинці води в трубі створити достатній імпульс тиску (для сталеві труби діаметром 55 мм і товщиною 5 мм приблизно 1,3 МПа). Воду від джерела 1 по-

дають трубопроводом живлення 2 до ударної камери 3, в якій є ударний клапан 4. Напірний клапан 5 може бути розміщений як в ударній камері, так і на вході в повітряний компенсатор 6, з якого вода під тиском $p \geq \rho g H$ подається напірним трубопроводом 7 в водонапірну башту 8. Оскільки робота гідравлічного тарана безперервна, то водонапірна башта і ударна камера обладнані зливними відводами води в дренаж. У неробочому стані ударний клапан 4 закритий внаслідок дії сили гідростатичного тиску $\rho g h$, а напірний клапан закритий під дією власної ваги $G \geq \rho g h S_{\text{кл}}$.

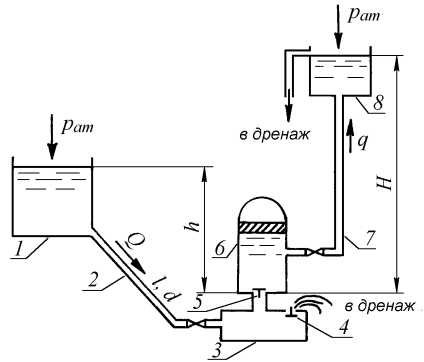


Рисунок 8.6 — Схема роботи гідравлічного тарана

Гідравлічний таран починає працювати як пульсуючий насос після примусового відкриття ударного клапана 4 і встановлення усталеної течії протягом 30...60 с. Далі ударний клапан періодично відкривається під дією власної ваги в момент виникнення зворотної ударної хвилі. Напірний клапан відкривається в момент повної зупинки потоку внаслідок підвищення тиску на величину $(\Delta p = \rho v c) \geq \rho g H$ і закривається під дією власної ваги через час t_f і т.д.

Коефіцієнт корисної дії гідравлічного тарана, який подає воду з витратою q на висоту H , можна визначити як відношення його корисної потужності $N_{\text{кор}} = \rho g H q$ до наявної потужності джерела води $N_{\text{джер}} = \rho g h Q$:

$$\eta = \frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{джер}}} = \frac{Hq}{hQ}. \quad (8.35)$$

Зауважимо, що цей коефіцієнт корисної дії враховує також стан трубопроводів, які використовуються для подачі води, оскільки напір і витрата в трубопроводі живлення 2 і напірному трубопроводі 7 (див. рис. 8.6) пов'язані між собою через рівняння Бернуллі, в якому відповідні втрати на тертя $h_{\text{тер}(2)}$ і $h_{\text{тер}(7)}$ залежать від витрати води:

$$h = h_{\text{мер}(2)}, \quad (8.36)$$

$$\Delta p = H + h_{\text{мер}(7)}. \quad (8.37)$$

Величина коефіцієнта корисної дії гідравлічного тарана залежить від відношення H/h і може змінюватися в межах від 0,85 для $H/h = 2$ до 0,4 для $H/h = 10$. В таблиці 8.2. наведена залежність $\eta = f(H)$ для співвідношення висот $H/h = 10$.

Таблиця 8.2 — Залежність коефіцієнта корисної дії η гідравлічного тарана від висоти підйому води H

H	0	7	11	19	20	26
η	0,56	0,41	0,32	0,15	0,13	0

Для проектування роботи гідравлічного тарану необхідно знати величини Q і H . Відповідно до можливостей рельєфу приймають величину $h = H/(5...10)$. При зміні h в діапазоні 1...10 м висота подачі води може сягати 100 м, а його продуктивність коливатись у межах $q = (0,07...0,4) Q$.

На практиці приймають довжину трубопроводу живлення $l \approx 5h$. Тоді пропускна здатність трубопроводу живлення діаметром $d = 50$ мм становить (77...242) л/хв., що дає можливість при підйомі води на висоту $H = (20...60)$ м, $\eta = 0,6...0,74$ і частоті гідрударів (30...120) хв.⁻¹ здійснювати подачу води з витратою $q = (5,7...22)$ л/с. Це дозволить забезпечити водою населений пункт чисельністю 300-400 осіб.

8.5 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Напишіть формулу для визначення інерційного напору. Поясніть фізичний зміст величин, які входять в неї.
- 2) Як зміниться положення п'єзометричної лінії для труби з постійним діаметром при виникненні позитивного і від'ємного локального прискорення?
- 3) Що називається прямим і непрямим гідравлічним ударом? Що називається фазою гідравлічного удару? Як вона впливає на підвищення тиску при гідравлічному ударі?
- 4) Що таке швидкість розповсюдження ударної хвилі? Від яких величин вона залежить?

- 5) Чим гаситься коливальний процес, який відбувається при гідравлічному ударі?
- 6) Як можна зменшити або попередити ударне підвищення тиску?
- 7) Який принцип роботи гідравлічного тарану?

Контрольні тестові завдання

1. Як впливає інерційний напір на втрати напору в трубопроводі у випадку рівноприскореної течії рідини?
 - а) втрати напору збільшуються;
 - б) втрати напору залишаються без змін;
 - в) втрати напору зменшуються;
 - г) результат залежить від напрямку течії рідини.
2. Що називається гідравлічним ударом?
 - а) дія струмини рідини, що витікає з насоса або труби, на плоску перегородку;
 - б) динамічний тиск потоку рідини на стінки русла внаслідок різкої зміни напрямку руху;
 - в) зміна тиску в трубопроводі внаслідок раптової зміни середньої швидкості рідини;
 - г) реактивна дія потоку на стінки русла.
3. З якою швидкістю розповсюджується ударна хвиля?
 - а) із швидкістю розповсюдження звуку в рідині;
 - б) із швидкістю, що перевищує швидкість звуку в рідині;
 - в) із швидкістю, близькою до швидкості звуку в рідині, яка залежить від роду рідини та матеріалу труби.
4. В якій трубі швидкість розповсюдження ударної хвилі при русі рідини буде найбільшою?
 - а) в полімерній;
 - б) в гумовій;
 - в) в металевій.
5. За якою формулою визначається тривалість фази гідравлічного удару?
 - а) $t_{\phi} = \frac{l}{c}$; б) $t_{\phi} = \frac{2l}{c}$; в) $t_{\phi} = \frac{l}{2c}$.
6. За якої умови буде виникати непрямий гідравлічний удар?
 - а) $t_{\text{зак}} < t_{\phi}$; б) $t_{\text{зак}} > t_{\phi}$; в) $t_{\text{зак}} = t_{\phi}$.
7. За якою формулою визначається підвищення тиск при прямому гідравлічному ударі?

а) $\Delta p_{y\partial} = \rho c v$; б) $\Delta p_{y\partial} = \rho c v \frac{t_{\phi}}{t_{зак}}$; в) $\Delta p_{y\partial} = \rho c v \frac{t_{зак}}{t_{\phi}}$.

8. Коли ударний тиск буде найбільшим?

- а) при прямому ударі;
- б) при непрямому ударі;
- в) при неповному ударі.

9. Які заходи здійснюються для боротьби з гідравлічним ударом?

- а) повільне закриття запірних пристроїв з метою збільшення часу зупинки потоку;
- б) установка в системі запобіжних клапанів та повітряних ковпаків;
- в) установка зворотних клапанів на напірній лінії відцентрових насосів;
- г) заходи, перелічені в пп. а), б), в).

10. Яким повинен бути час закриття запірною пристрою для зменшення сили гідравлічного удару?

- а) меншим від фази удару;
- б) рівним фазі удару;
- в) більшим від фази удару.

9 ОБТІКАННЯ ТІЛ ПОТОКОМ РІДИНИ ТА ВІЛЬНІ СТРУМЕНІ

9.1 Вільне падіння твердих тіл у рідині

Задача про вільне падіння твердих тіл у рідині має практичне застосування для визначення в'язкості рідин (метод Стокса), при розрахунках виносу шламу з вибою свердловин при їх бурінні тощо.

Розглянемо рух твердого тіла вагою G в рідині густиною ρ_p (рис. 9.1). Якщо вага тіла більша за підймальну (архімедову) силу F_a , то тіло буде рухатись вниз з деяким прискоренням до того часу, поки сила лобового опору R не урівноважить різницю сили ваги і підймальної сили. В подальшому тіло буде рухатися вниз з постійною швидкістю v_m . Для визначення величини цієї швидкості запишемо рівняння рівноваги сил, які діють на тіло, в проекції на вертикальну вісь

$$F_{ap} - G + R = 0. \quad (9.1)$$

Підймальна сила, яка діє на тіло об'ємом V_m , буде рівна

$$F_a = \rho_p g V_m. \quad (9.2)$$

Вага тіла

$$G = \rho_m g V_m, \quad (9.3)$$

де ρ_m — густина тіла.

Сила лобового опору під час падіння тіла визначається як

$$R = C_f S_m \frac{\rho_p v_m^2}{2}, \quad (9.4)$$

де C_f — коефіцієнт лобового опору;
 S_m — площа проекції тіла на площину, нормальну до вектора швидкості v_m .

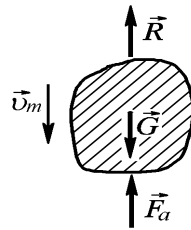


Рисунок 9.1 — Дія сил на тіло, що падає

Коефіцієнт опору C_f залежить від числа Рейнольдса, структури потоку, форми тіла і його положення в потоці. Величина цього коефіцієнта визначається дослідним шляхом. Так для кулі при $Re = 4 \cdot 10^6$ $C_f = 0,09$, при $Re = 1 \cdot 10^6$ $C_f = 0,13$. Для еліпсоїда при $Re > 5,5 \cdot 10^6$ $C_f = 0,2$, при $Re < 4,5 \cdot 10^5$ $C_f = 0,6$. Для шайби $C_f = 1,12$, для циліндра $C_f = 0,63 \dots 1,2$ при $Re = 8,8 \cdot 10^4$.

З врахуванням формул (9.2)-(9.4) рівняння рівноваги (9.1) набуде вигляду

$$V_m g(\rho_m - \rho_p) - C_f S_m \frac{\rho_p v_m^2}{2} = 0, \quad (9.5)$$

звідки

$$v_m = \sqrt{\frac{2V_m g}{C_f S_m} \cdot \frac{\rho_m - \rho_p}{\rho_p}}. \quad (9.6)$$

Із залежності (9.6) видно, що на швидкість падіння тіл в рідині суттєво впливає різниця їх густин і об'єм тіла: при меншій різниці густин тіло більшого об'єму може опускатися з тією ж швидкістю, що і важке тіло меншого об'єму.

Слід зауважити, що формула (9.6) отримана для падіння тіла в нестисливій рідині і без врахування впливу стінок каналу на цей процес.

9.2 Сила динамічного тиску струменя рідини на стінки

Розглянемо випадок, коли вільний струмінь, що витікає з отвору чи насадки, натрапляє на перешкоду, наприклад, у формі поверхні випуклої форми, розміщеної симетрично до його осі (рис. 9.2).

Якщо знехтувати опором повітря і розбризкуванням рідини в результаті удару, то можна вважати, що при ударі об поверхню струмінь ділиться на дві рівні частини, які відхиляються від попереднього напрямку руху на

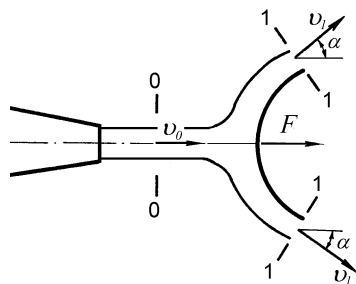


Рисунок 9.2 — Обтікання струменем нерухомої перешкоди

кут α , причому, швидкість частинок рідини при обтіканні стінки залишається незмінною, тобто $v_0 = v_1$. Внаслідок цього удару на поверхню діятиме сила динамічного тиску F в напрямку осі Ox . Для знаходження цієї, так званої, активної сили тиску F використаємо теорему про зміну кількості руху рідини об'єму рідини, яка є між перерізами 0-0 і 1-1. У проекціях на вісь струменя Ox зміна кількості руху за час Δt буде рівна імпульсу сили F за той же проміжок часу:

$$m v_0 - \frac{m}{2} v_1 \cos \alpha - \frac{m}{2} v_1 \cos \alpha = F \Delta t, \quad (9.7)$$

де $m = \rho Q \Delta t$ — маса рідини густиною ρ в струмені між перерізами 0-0 і 1-1 при об'ємній витраті рідини $Q = v_0 S_0$.

Тоді, враховуючи, що $v_0 = v_1$, отримаємо вираз для визначення сили динамічного тиску на нерухому симетричну стінку

$$F = \rho Q v_0 (1 - \cos \alpha). \quad (9.8)$$

Якщо кут $\alpha = 90^\circ$ (рис. 9.3), то з врахуванням рівняння витрати маси

$$F = \rho S_0 v_0^2, \quad (9.9)$$

де S_0 — площа живого перерізу струменя.

При витіканні через насадку швидкість течії рідини визначається через напір рідини H за формулою $v_0 = \varphi \sqrt{2gH}$.

Знехтувавши опором насадки, прийемо коефіцієнт швидкості $\varphi = 1$ і запишемо рівність (9.9) у вигляді

$$F = 2\rho g H S_0. \quad (9.10)$$

Із формули (9.10) видно, що сила динамічного тиску на плоску поверхню, перпендикулярну до осі струменя, в два рази більша величини сили гідростатичного тиску.

Для кута $\alpha > 90^\circ$ ($\cos \alpha < 0$), як зображено на рис. 9.4, сила динамічного тиску зростає і у випадку, коли $\alpha = 180^\circ$ ($\cos \alpha = -1$), рівність (9.8) набуде вигляду:

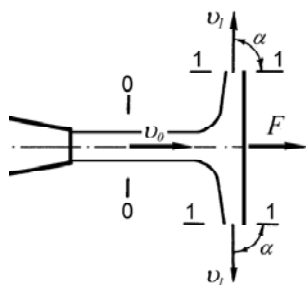


Рисунок 9.3 — Дія струменя рідини на плоску стінку

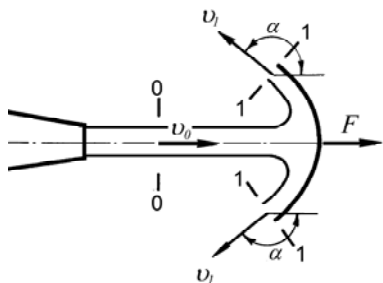


Рисунок 9.4 — Дія струменя рідини на ввігнуту стінку

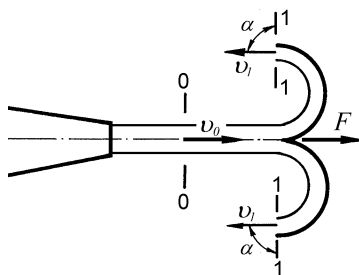


Рисунок 9.5 — Дія струменя рідини на лопатку Пельтона

$$F = 4\rho g H S_0. \quad (9.11)$$

Тобто в ідеальному випадку сила динамічного тиску на ввігнуту криволінійну поверхню, зображену на рис. 9.5, (так звану лопатку Пельтона), в чотири рази більша від величини сили гідростатичного тиску. Такими лопатками обладнані ротори активних турбін електростанцій, збудованих в гірських місцевостях, де при малій витраті води можна створити високі напори.

Оскільки лопатки турбіни мають свою колову швидкість руху u , то для знаходження дійсної сили тиску рідини на поверхню лопатки в формулу (9.8) замість v_0 підставляють величину відносної швидкості рідини $w = v_0 - u$.

Тоді

$$F = \rho Q w (1 - \cos \alpha) = \rho Q (v_0 - u) (1 - \cos \alpha). \quad (9.12)$$

Потужність такої турбіни N рівна добутку сили на шлях за одиницю часу, тобто на величину колової швидкості руху лопаток турбіни u :

$$N = Fu = \rho Q (v_0 - u) (1 - \cos \alpha) u, \quad (9.13)$$

або

$$N = \rho Q (v_0 u - u^2) (1 - \cos \alpha). \quad (9.14)$$

При $u = 0$ (пластина нерухома), $Q = \text{const}$, $v_0 = \text{const}$ і $\alpha = \text{const}$ активна сила тиску буде максимальна, але $N = 0$. При $u = v_0$ активна сила тиску і потужність рівні нулю. Очевидно,

що максимальна потужність за формулою (9.14) буде тоді, коли

$$\frac{dN}{du} = \rho Q (v_0 - 2u)(1 - \cos \alpha) = 0, \quad (9.15)$$

звідки

$$u_{\text{екстр}} = \frac{v_0}{2}. \quad (9.16)$$

Оскільки кінетична енергія потоку, що подається на лопатки турбіни рівна $m v_0^2 / 2 = \rho Q v_0^2 / 2$, то очевидно, що тільки половина кінетичної енергії потоку використовується для виконання корисної роботи.

Приклад 9.1. Струмінь води під напором $H = 120$ м вилітає з насадки гідромонітора з коефіцієнтом швидкості $\varphi = 0,96$, діаметром $d = 15$ мм і діє на нерухому поверхню. Визначити силу динамічного тиску струменя на поверхню, якщо: 1) поверхня плоска і розміщена перпендикулярно до струменя (див. рис. 9.3); 2) поверхня симетрично вигнута і розміщена під кутом $\alpha = 60^\circ$ до осі струменя (див. рис. 9.2).

Розв'язок: Визначимо швидкість витікання струменя з насадки

$$v_0 = \varphi \sqrt{2gH} = 0,96 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 120} = 46,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

У першому випадку, коли струмінь діє перпендикулярно до поверхні, сила взаємодії рівна

$$F_1 = \rho S_0 v_0^2 = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_0^2 = 1000 \frac{3,14 \cdot 0,015^2}{4} 46,6^2 = 384 \text{ Н},$$

де $S_0 = \pi d^2 / 4$ — площа поперечного перерізу струменя води.

У другому випадку, коли перешкода розміщена під кутом 60° до осі струменя, сила визначається як

$$F_2 = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_0^2 (1 - \cos \alpha) = 1000 \frac{3,14 \cdot 0,015^2}{4} 46,6^2 (1 - \cos 60^\circ) = 192 \text{ Н},$$

тобто в два рази менша за силу F_1 .

Відповідь: $F_1 = 384$ Н; $F_2 = 192$ Н.

9.3 Траєкторія руху вільного струменя

Струмінь називається вільним і незатопленим, якщо він рухається в газовому середовищі. Рівняння теоретичної траєк-

торії такого струменя виводиться з припущеннями, що всі його частинки рухаються однаково, при цьому, в будь-який момент часу t , координати частинки рідини відносно точки витікання визначаються як координати вільної матеріальної точка, яка рухається в порожнечі без опору, за формулами

$$x = vt \cdot \cos \theta \quad (9.17)$$

і

$$y = vt \cdot \sin \theta - \frac{gt^2}{2}, \quad (9.18)$$

де v — початкова швидкість руху частинки рідини;
 θ — кут нахилу вектора початкової швидкості до горизонту (рис. 9.6).

Виключаючи з формул (9.17) і (9.18) час t , отримуємо рівняння, яке описує траєкторію вільного струменя рідини:

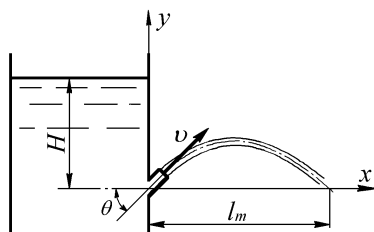


Рисунок 9.6 — Траєкторія руху вільного струменя рідини

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \theta}. \quad (9.19)$$

Якщо прийняти у формулі (9.19) $y = 0$, то з неї можна визначити теоретичну віддаль польоту струменя $x = l_m$:

$$l_m = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}, \quad (9.20)$$

звідки випливає, що теоретично максимальна віддаль польоту струменя буде при куті $\theta = 45^\circ$:

$$l_{m\max} = \frac{v^2}{g}. \quad (9.21)$$

Формула (9.21) добре узгоджується з дослідними даними лише при напорах витікання до 7 м. Зі збільшенням напору максимальна віддаль польоту зменшується.

Якщо у формулах (9.17) і (9.18) кут $\theta = 0$ струмів витікає горизонтально, то виключаючи час t , можна отримати формулу для знаходження швидкості витікання струменя за відомих координат точки на траєкторії x і y

$$v = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}}. \quad (9.22)$$

Приклад 9.2. Вільний незатоплений струмінь витікає з насадки з діаметром вихідного отвору $d = 20$ мм з витратою $Q = 3$ л/с під кутом $\theta = 60^\circ$ (див. рис. 9.6). Визначити максимальну висоту, на яку підніметься струмінь і віддаль, на яку він буде падати.

Розв'язок: Координати найвищої точки струменя можна з умови, що в цій точці похідна від функції (9.19) $dy/dx = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta - \frac{gx}{v^2 \cos^2 \theta} = 0.$$

Звідси
$$x = \frac{v^2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{g}.$$

Підставивши цей вираз у формулу траєкторії струмени (9.19), знайдемо максимальну висоту піднімання струменя:

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}.$$

Розрахуємо швидкість витікання струменя з насадки:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,003}{3,14 \cdot 0,02^2} = 9,55 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тоді висота
$$h = \frac{9,55^2 \sin^2 60^\circ}{2 \cdot 9,81} = 3,49 \text{ м}.$$

Віддаль, на яку падає струмина визначаємо за формулою (9.20):

$$l_m = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{9,55^2 \cdot \sin(2 \cdot 60^\circ)}{9,81} = 8,05 \text{ м}.$$

Відповідь: $h = 3,49$ м, $l_m = 8,05$ м.

9.4 Вертикальні струмені

Вільний незатоплений вертикальний струмінь теоретично піднімається на висоту швидкісного напору (рис. 9.7)

$$H = \frac{v^2}{2g}. \quad (9.23)$$

Насправді окремі частини струменя піднімаються на різні висоти, причому окремі краплі в його центрі піднімаються на висоту $h < H$.

Відносна втрата висоти зумовлена, головним чином, опором довколишнього газового середовища і дорівнює

$$\psi = \frac{H - h}{h}. \quad (9.24)$$

Коефіцієнт ψ залежить від форми насадки, густини газу і властивостей рідини. Значення його визначають дослідним шляхом. Так, для води, у випадку витікання через зовнішню дифузорну насадку діаметром (10...25) мм коефіцієнт ψ змінюється в межах 0,023...0,006.

На практиці висоту фонтану з достатньою точністю вираховують зі співвідношення

$$h \approx 0,95 H. \quad (9.25)$$

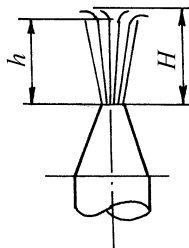


Рисунок 9.7 — Витікання вертикального струменя

9.5 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) За якої умови швидкість падіння твердої частинки в рідині буде постійна?
- 2) Як визначити швидкість падіння твердої частинки в рідині?
- 3) Як визначається сила дії потоку на нерухомі перешкоди?
- 4) Які допущення були використані при визначенні сили тиску струменя на перешкоди?
- 5) Як відрізняється сила динамічного тиску струменя від сили гідростатичного тиску на нерухому стінку?
- 6) Як змінюється напрям руху рідини на лопатках Пельтона і що це дає?
- 7) Як визначається сила активної дії потоку рідини на рухомі перешкоди?
- 8) Що таке відносна швидкість руху рідини?
- 9) Як визначається потужність, яку потік передає лопаткам турбіни?
- 10) Яка форма траєкторії вільного струменя?
- 11) Як визначити теоретичну дальність польоту струменя?
- 12) Як визначити висоту підйому вільного струменя?

Контрольні тестові завдання

1. Що буде з тілом, яке опустили в рідину, якщо його густина більша за густину цієї рідини?
 - а) тіло буде тонути з постійною швидкістю;
 - б) тіло зануриться і потім вплине на поверхню;
 - в) тіло буде тонути з постійно зростаючою швидкістю;
 - г) тіло буде тонути зі зростаючою швидкістю, яка потім стабілізується і залишатиметься незмінною.

2. Сила динамічного тиску струменя на нерухому плоску поверхню:
 - а) вдвічі більша, ніж сила статичного тиску;
 - б) вдвічі менша, ніж сила статичного тиску;
 - в) рівна силі статичного тиску;
 - г) в чотири рази більша, ніж сила статичного тиску.

3. Сила динамічного тиску струменя на нерухому плоску поверхню:
 - а) вдвічі менша, ніж сила статичного тиску;
 - б) рівна силі статичного тиску;
 - в) вдвічі більша, ніж сила статичного тиску;
 - г) в чотири рази більша, ніж сила статичного тиску.

4. Сила динамічного тиску струменя на лопатки Пельтона визначається за формулою:
 - а) $F = 4\rho g H S_0$;
 - б) $F = 2\rho g H S_0$;
 - в) $F = \rho S_0 v_0^2$;
 - г) $F = \rho Q v_0 (1 - \cos \alpha)$, де $\alpha = 120^\circ$.

5. Теоретично максимальна віддаль польоту вільного струменя буде при куті нахилу вектора початкової швидкості до горизонту:
 - а) $\theta = 15^\circ$;
 - б) $\theta = 30^\circ$;
 - в) $\theta = 45^\circ$;
 - г) $\theta = 60^\circ$.

10 БЕЗНАПІРНИЙ УСТАЛЕНИЙ РУХ РІДИНИ

Рух рідини у відкритому каналі або частково заповненому трубопроводі зветься безнапірним (рис. 10.1). Форма поперечного перерізу може бути трикутною, трапецеїдальною та будь-якою іншою. Особливою прикметою безнапірного потоку є наявність вільної поверхні з однаковим тиском газу по всій довжині. Такі потоки існують, наприклад, в магістральних нафто- та продуктопроводах у гірських умовах, за перевальними точками, в системах жолобів бурових установок, в промислових установках попереднього збору газу.

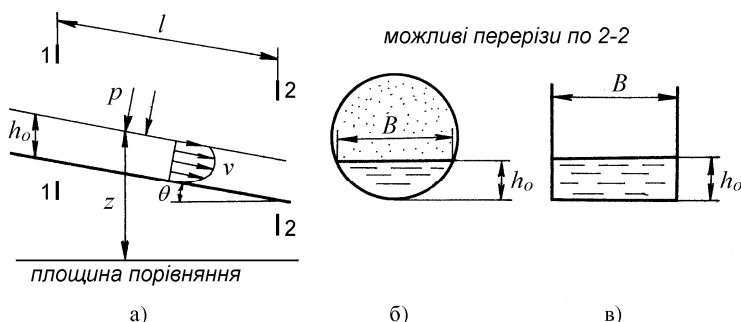


Рисунок 10.1 — Види безнапірного руху рідини

10.1 Основні рівняння безнапірної течії рідини

Основне рівняння безнапірної течії рідини можна отримати шляхом перетворення рівняння Бернуллі (див. (3.50)). За умови, що тиск на вільній поверхні рідини є незмінний ($p = \text{idem}$), дане рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d}{dl} \left(z + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2} \right) + i = 0, \quad (10.1)$$

де z — координата вільної поверхні; α — коефіцієнт Коріоліса; Q — об'ємна витрата рідини; g — прискорення вільного падіння; S — площа живого перерізу потоку; i — гідравлічний нахил.

Оскільки геометричний нахил дна каналу ($i_0 = \sin \theta$) в більшості випадків є достатньо малий, то глибина потоку вимірюється вздовж вертикалі. При цьому умовно вважається, що живі перерізи потоку вертикальні, а не перпендикулярні до дна, і похибками, які виникають внаслідок цього припущення, нехтують.

Рівняння (10.1) може використовувались як для ламінарного, так і для турбулентного режимів руху плавноміernih потоків, в яких крайні лінії течії утворюють кути менші $8 \dots 10^\circ$, а також для криволінійних потоків з дуже великими радіусами кривизни. В таких потоках можна вважати, що тиск в площині живого перерізу відповідає основному законові гідростатики.

Для рівномірного руху з постійною площею поперечного перерізу потоку ($S = \text{idem}$) лінія вільної поверхні буде паралельна лінії дна (див. рис. 10.1). Тоді з рівняння (10.1)

$$\frac{dz}{dl} = -i. \quad (10.2)$$

Гідрравлічний нахил каналу виражають через його гідрравлічний радіус R_z :

$$i = \frac{\lambda}{4R_z} \frac{v^2}{2g}. \quad (10.3)$$

Інтегруючи рівняння (10.2) з врахуванням (10.3) в межах зміни dz від z_1 до z_2 і dl від 0 до l , отримаємо

$$z_1 - z_2 = \lambda \frac{l}{4R_z} \frac{v^2}{2g}. \quad (10.4)$$

Таким чином, рівномірний рух реалізується при $z_1 > z_2$. Швидкість течії рідини вираховуємо з формули (10.3):

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda} R_z i} = C \sqrt{R_z i}. \quad (10.5)$$

де $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ — коефіцієнт Шезі.

Тоді витрата рідини рівна

$$Q = S \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} R_c i = SC \sqrt{R_c i} = K \sqrt{i} , \quad (10.6)$$

де $K = SC \sqrt{R_c}$ — витратна характеристика потоку.

Звернемо увагу на те, що для рівномірної течії рідини геометричний нахил дна каналу i_0 дорівнює гідравлічному нахилу i , тобто $i = i_0$.

Коефіцієнт Шезі в загальному випадку залежить від шорсткості, геометричної форми і розмірів поперечного перерізу каналу. Як правило, його визначають за різноманітними емпіричними формулами. Наприклад, за формулою Маннінга

$$C = \frac{1}{n} R_c^{1/6} , \quad (10.7)$$

за формулою Н. Н. Павловського

$$C = \frac{1}{n} R_c^y , \quad (10.8)$$

де показник степеня $y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R_c}$, або за формулою І. І. Агроскіна

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \lg R_c . \quad (10.9)$$

Тут C — коефіцієнт Шезі, $m^{1/2}/c$; n — коефіцієнт шорсткості, значення якого наведені у табл. 10.1; R_c — гідравлічний радіус потоку, м.

10.2 Гідравлічно найбільш вигідний переріз каналу

Гідравлічно найбільш вигідним живим перерізом каналу є такий, в якому для заданої площі поперечного перерізу S та геометричного нахилу i_0 витрата Q є найбільша. При цьому гідравлічний радіус R_c буде найбільшим, а змочений периметр — найменшим. В такому перерізі, для даної витрати Q і швидкості v , дно каналу має найменший нахил. У гідравлічно найбільш вигідних перерізах прямокутної форми геометричні розміри є у співвідношенні $h_0/B = 0,5$. Для круглих труб — $h_0/D = 0,5$ і серед всіх можливих гідравлічно найбільш вигід-

них перерізів різної форми найбільш вигідною є півколо, тому що в цьому випадку для заданої площі величина змоченого периметру буде найменшою.

Таблиця 10.1 — Значення коефіцієнта шорсткості n для розрахунку коефіцієнта Шезі

Характеристика поверхні каналу	n
Чисті (нові) керамічні, чавунні, сталеві труби, стругані дошки	0,011
Водопровідні труби в нормальних умовах, нестругані дошки	0,012
Забруднені водопровідні труби	0,013
Бетоновані канали в середніх умовах утримання і ремонту	0,014
Середня цегляна кладка	0,015
Добра бутова кладка	0,017
Канали вкриті товстим шаром намулу	0,018
Середня бутова кладка, бруківка	0,020
Земляні канали в середніх умовах утримання і ремонту	0,025
Земляні канали в порівняно поганих умовах	0,030
Канали, які помітно забруднені камінням і водоростями; річки в порівняно нормальних умовах	0,035
Канали у винятково поганих умовах	0,040

Приклад 10.1. Визначити витрату і середню швидкість рівномірної течії води в прямокутному бетонному каналі шириною $B = 1$ м і глибиною $h_0 = 0,5$ м. Геометричний нахил дна каналу $i_0 = 0,0002$. Канал в середніх умовах утримання і ремонту. Як зміниться витрата, якщо використати рівновеликий наполовину заповнений циліндричний канал.

Розв'язок: Згідно умов задачі з табл. 10.1 приймаємо коефіцієнт шорсткості $n = 0,014$.

Виразуємо площу і гідравлічний радіус прямокутного каналу:

$$S = Bh_0 = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м}^2, \quad R_z = \frac{S}{2h_0 + B} = \frac{0,5}{2 \cdot 0,5 + 1} = 0,25 \text{ м}.$$

Розраховуємо коефіцієнт Шезі за формулою Павловського (10.8):

$$\begin{aligned} y &= 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R_z} = \\ &= 2,5\sqrt{0,014} - 0,13 - 0,75(\sqrt{0,014} - 0,1)\sqrt{0,25} = 0,1589 \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{n} R_z^y = \frac{1}{0,014} 0,25^{0,1589} = 57,3 \frac{\text{м}^{1/2}}{\text{с}}.$$

Визначаємо об'ємну витрату і середню швидкість:

$$Q = SC\sqrt{R_z i} = 0,5 \cdot 57,3 \sqrt{0,25 \cdot 0,0002} = 0,203 \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{0,203}{0,5} = 0,406 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Визначаємо параметри рівновеликого наполовину заповненого циліндричного каналу:

$$d = \sqrt{\frac{8S}{\pi}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,5}{3,14}} = 1,128 \text{ м}, \quad R_c = \frac{d}{4} = \frac{1,128}{4} = 0,282 \text{ м},$$

$$y = 2,5\sqrt{0,014} - 0,13 - 0,75(\sqrt{0,014} - 0,1)\sqrt{0,282} = 0,1585,$$

$$C = \frac{1}{0,014} 0,282^{0,1585} = 58,4 \frac{\text{м}^{1/2}}{\text{с}}.$$

Визначаємо об'ємну витрату в циліндричному каналі:

$$Q = \frac{\pi d^2}{8} C \sqrt{R_c i} = \frac{3,14 \cdot 1,128^2}{8} \cdot 58,4 \sqrt{0,282 \cdot 0,0002} = 0,219 \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

Відповідь: Для прямокутного каналу $Q = 0,203 \text{ м}^3/\text{с}$, $v = 0,406 \text{ м/с}$; в наполовину заповненому циліндричному каналі витрата збільшиться до $0,219 \text{ м}^3/\text{с}$.

10.3 Критична глибина потоку

Для заданої витрати Q навіть у тих випадках, коли потік в плані прямолінійний, а форма поперечного перерізу каналу незмінна, зміна геометричного нахилу i_0 веде до зміни глибини рівномірного потоку h_0 , площі його живого перерізу, а тому і середньої швидкості потоку. Це призводить до зміни значення питомої енергії перерізу, що характеризує стан потоку. Питома енергія перерізу E — це питома енергія потоку, яка відповідає надлишковому тиску і підрахована відносно найнижчої точки його живого перерізу

$$E = h_0 + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (10.10)$$

або
$$E = h_0 + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2}, \quad (10.11)$$

де питома потенціальна енергія перерізу $E_n = h_0$, а питома кінетична енергія перерізу $E_k = \alpha Q^2 / (2gS^2)$.

При обчисленні величини E в кожному живому перерізі вибирається своя площа порівняння. В цьому і полягає відмінність між питомою енергією перерізу та повною питомою енергією потоку, при підрахунку якої вибирається одна і та ж сама горизонтальна площина. Якщо дно каналу горизонтальне, і рівень його приймається за рівень площини порівняння, то питома енергія перерізу чисельно співпадає з питомою енергією потоку.

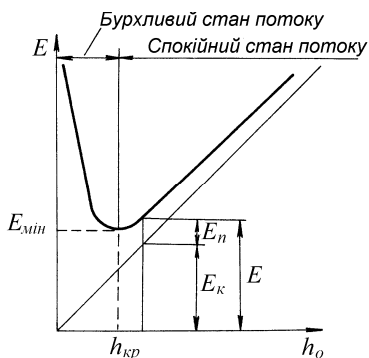


Рисунок 10.2 — Залежність питомої енергії перерізу від глибини потоку

Таким чином, при $Q = idem$ та $S = \varphi(h_0)$ згідно з (10.11) $E = f(h_0)$ (рис. 10.2). Глибина потоку з мінімальним значенням питомої енергії перерізу E_{min} називається критичною.

Визначимо критичну глибини потоку $h_{кр}$ для прямокутного потоку шириною B . Для цього знайдемо E_{min} , прирівнявши до нуля похідну dE/dh_0 і врахувавши, що $dS = B dh$ (рис. 10.3).

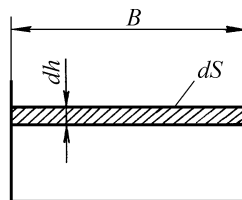


Рисунок 10.3 — Форма поперечного перерізу каналу

$$\frac{dE}{dh_0} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gS^3} \cdot \frac{dS}{dh_0} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gS^3} = 0. \quad (10.12)$$

Тоді

$$\frac{\alpha Q^2 B}{gS^3} = 1 \quad (10.13)$$

і

$$\frac{\alpha Q^2 B}{gS^2 B h_{кр}} = \frac{\alpha v^2}{g h_{кр}} = Fr. \quad (10.14)$$

Цей безрозмірний комплекс є не що інше, як число Фруда, визначене за середньою глибиною потоку. Таким чином, $h_{кр}$ існує за виконання умови (10.13), тобто, коли число $Fr = 1$.

Бурхливий та спокійний стан потоку можливий як при рівномірному, так і при нерівномірному русі рідини. При рівномірному русі бурхливий стан буде у випадку $h_0 < h_{кр}$ ($Fr > 1$), а спокійний, коли $h_0 > h_{кр}$ ($Fr < 1$).

Якщо глибина потоку вздовж течії не змінюється і дорівнює критичній, то такий стан потоку називається критичним. Існування критичного потоку можливе лише при рівномірному русі, коли $h_0 = h_{кр}$. В цьому випадку геометричний нахил дна каналу називається критичним.

Критична глибина визначається шляхом розв'язання рівняння (10.13), в якому приймається $B = B_{кр}$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{S_{кр}^3}{B_{кр}}, \quad (10.15)$$

де $S_{кр} = f_1(h_{кр})$, $B_{кр} = f_2(h_{кр})$.

Для прямокутного каналу шириною B рівняння (10.15) можна легко розв'язати відносно критичної глибини, враховуючи, що $S_{кр} = Bh_{кр}$, а $B_{кр} = B$:

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gB^2}}. \quad (10.16)$$

Для потоків з більш складними формами перерізів рівняння (10.15) розв'язується методом послідовних наближень.

10.4 Рівномірний бурхливий потік

Потоки, глибина яких менша від критичної, зветься бурхливими, а канали, в яких вони існують, швидкоплинами. В таких потоках виникають гравітаційні хвилі (стоячі та біжучі), а при достатньо значних швидкостях можлива аерація потоку.

Основними характеристиками хвиль є: довжина хвилі L_x , висота хвилі h_x , швидкість пересування хвильового фронту v_x (рис. 10.4).

Гравітаційні хвилі виникають під дією сил ваги внаслідок гідродинамічної нестійкості потоку.

При $i \approx i_{кр}$ на швидкоплині можливе утворення стоячої хвилі. В цьому випадку $v_x = 0$, $h_x \ll h_{нб}$ та

$$v_{нб} = \sqrt{gh_{нб}},$$

де $h_{нб}$ і $v_{нб}$ — відповідно глибина та середня швидкість рівномірного незбуреного безхвильового потоку.

При $i > i_{кр}$ швидкість хвилі відносно стінок каналу дорівнює

$$v = v_{нб} + v_x,$$

де швидкість хвилі визначається як

$$v_x = \sqrt{\frac{gH_2}{2h_{нб}}(H_2 + h_{нб})}.$$

Хвилі, для яких швидкість відносно стінок каналу $v > v_{нб}$, називаються біжучими (рис. 10.5). Вони виникають за умови, що

$$\frac{v_{нб}^2}{gh_{нб}} > 2 \dots 5.$$

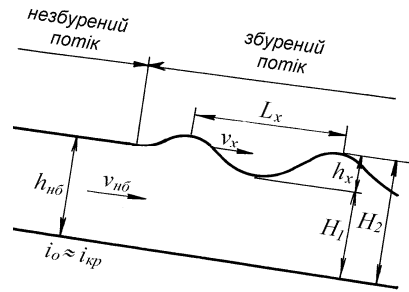


Рисунок 10.4 — Схема утворення хвилі у бурхливому потоці

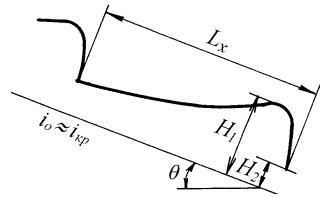


Рисунок 10.5 — Виникнення біжучих хвиль

10.5 Нерівномірний плавномінний рух у призматичних каналах

Нерівномірний рух рідини має місце навіть в тих випадках, коли потік в плані прямолінійний, форма та площа поперечного перерізу каналу незмінна по довжині, але змінюються глибина, площа живого перерізу і швидкість потоку (рис. 10.6).

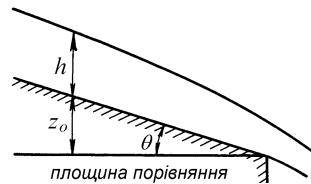


Рисунок 10.6 — До виведення диференціального рівняння вільної поверхні

Згадані вище канали, в яких $dS/dl = 0$, називають призматичними (див. рис. 10.1, б, рис. 10.1, в).

Однією з найбільш важливих задач теорії нерівномірного руху в таких потоках є побудова кривої вільної поверхні рідини. Для цього складається диференціальне рівняння вільної поверхні, скориставшись рівнянням (10.1).

Отримаємо таке рівняння для призматичного каналу прямокутного перерізу (див. рис. 10.3). Оскільки для такого каналу $B = dS/dh$, то тоді

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha Q^2}{2gS^2} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{gS^3} \cdot \frac{dS}{dh} \cdot \frac{dh}{dl} = -\frac{\alpha Q^2 B}{gS^3} \cdot \frac{dh}{dl}. \quad (10.17)$$

Крім того, треба мати на увазі, що згідно з рис. 10.6

$$z = z_0 + h.$$

Тоді

$$\frac{dz}{dl} = \frac{dz_0}{dl} + \frac{dh}{dl} = -i_0 + \frac{dh}{dl}. \quad (10.18)$$

Після підставлення цих виразів (10.17) і (10.18) у рівняння (10.1) та його перетворення отримаємо

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - i}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gS^3}}. \quad (10.19)$$

Внаслідок того, що досліджуваний рух є плавномірний, його гідравлічний нахил можна визначити, як при рівномірному русі

$$i = \frac{Q^2}{K^2}, \quad (10.20)$$

і тоді рівність (10.19) набуває вигляду

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i_0 - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gS^3}}. \quad (10.21)$$

Формула (10.21) називається диференціальним рівнянням вільної поверхні. Із аналізу цього рівняння випливає, що залежно від співвідношення чисельника і знаменника глибина потоку по довжині або зменшується, або зростає. Можливе також досягнення критичної глибини потоку за умови (10.13).

Форма вільної поверхні залежить від багатьох факторів, які докладно розглядаються в спеціальній літературі.

10.5.1 Особливості формування нерівномірного плавномірного бурхливого потоку

Один із типових випадків нерівномірного руху з прямим нахилом дна ($i_0 = 0$), який може існувати в трубопроводі (див. рис. 10.1, б), наведений на рис. 10.7. На першій ділянці ($i_{01} < i_{кр}$) $h > h_{кр}$, і вільна поверхня має форму кривої спаду і фактично існує не на довжині l_1 , а впродовж всієї ділянки, асимптотично наближаючись вверх по течії до лінії нормальних глибин N_1-N_1 . На другій ділянці ($i_{02} > i_{кр}$) $h < h_{кр}$ вільна поверхня також має форму кривої спаду, яка асимптотично наближається до лінії нормальних глибин N_2-N_2 і зливається з нею у безмежності.

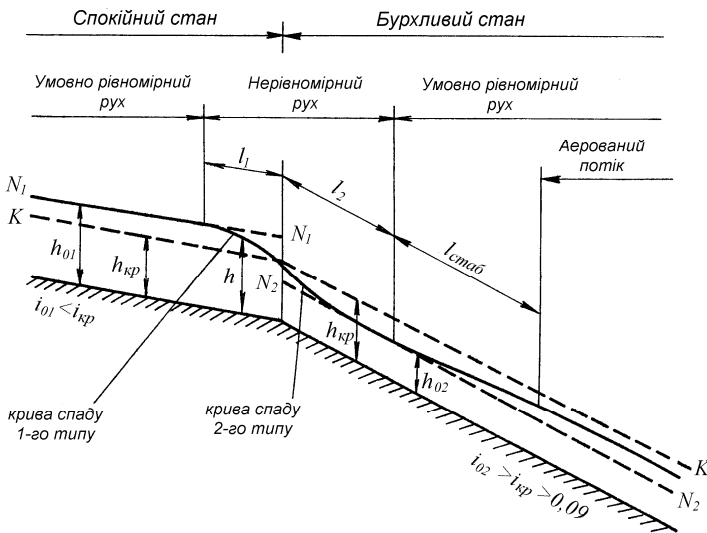


Рисунок 10.7 — Види руху в каналі з прямим нахилом дна

Таким чином, криві спаду мають нескінченно велику довжину. Однак практично завжди довжини цих кривих обмежуються, виходячи із умови

$$|h - h_0|/h_0 \leq 0,01 \dots 0,05$$

На ділянці другого каналу нижче кривої спаду спочатку виникають незначні окремі збурювання на вільній поверхні (див. рис. 10.4). При подальшому пересуванні вздовж каналу вони об'єднуються, створюючи суцільний хвильовий фронт. Високі хвилі, маючи більші швидкості, наздоганяють малі хвилі і поглинають їх. Внаслідок цього відбувається збільшення як висоти, так і довжини біжучих хвиль. Розвинені біжучі хвилі (див. рис. 10.5), у яких $h_x = 0,5 h_{кр}$, формуються в каналі довжиною $l_0 \geq 30h_{нб}/\lambda$, яка значно перевищує довжину початкової ділянки l_2 . Завершується процес росту довжини і висоти біжучої хвилі в кінці ділянки довжиною $l_{стаб} \approx (7 \dots 9,5)h_{кр}/\lambda$, її висота — $h_{стаб} \approx (6,5 \dots 8,5)H_1$, а швидкість $v = 1,5v_{нб}$. Далі вниз по течії параметри хвилі стабілізуються. Стабілізація хвиль найбільш ймовірно пов'язана з завалюванням її гребеня і виникненням внаслідок цього аерації потоку.

Аерований швидкоплин у поперечному перерізі по висоті складається, як правило, з трьох зон. В першій зоні відбувається рух крапель рідини в газі, в другій — рух бульбашок у рідині, в третій — рух рідини без газових включень (зі збільшенням степеня аерації потоку товщина третьої зони зменшується). При рівномірному русі розвиненого аерованого потоку існує динамічна рівновага між кількістю газу, який залишає його внаслідок спливання газових бульбашок. В умовах динамічної рівноваги кількість рідини, яка повертається в потік у вигляді крапель дорівнює кількості крапель, які викидаються з потоку. За дослідями початок аерації потоку води виникає при $i > 0,09$. Слід підкреслити, що ця умова відповідає початку аерації потоку для рівномірного потоку.

Викладений вище процес формування стабілізованого аерованого потоку базується на дослідах, переважна більшість яких проведена на водяних потоках у відкритих каналах. Поодинокі досліди вивчення безнапірних аерованих потоків у магістральних нафтопроводах якісно співпадають з викладеними вище закономірностями, але є недостатніми для розповсюдження закономірностей, отриманих для водяних потоків, на потоки нафти та нафтопродуктів. Це в першу чергу обумо-

влено відмінністю таких властивостей рідин як в'язкість та поверхневий натяг, які у воді та нафті (нафтопродуктах) значно відрізняються одне від одного.

10.6 Гідравлічний стрибок

Аналіз рівняння (10.21) дозволяє зробити певні висновки.

При $i_0 < i_{кр}$ і $h_0 > h_{кр}$ лінія $N-N$ вище лінії $K-K$, а при $i_0 > i_{кр}$ і $h_0 < h_{кр}$ лінія $N-N$ нижче лінії $K-K$ (див. рис. 10.7). Глибина потоку в каналі може коливатись у дуже значних межах. При заданих значеннях витрати Q і нахилі i_0 завжди можна підібрати такі значення глибини h , при яких чисельник або знаменник правої частини рівняння (10.21) можуть перетворитись в нуль, бути більшими або меншими від нуля.

При $K_0 = K$, тобто при $h = h_0$ (отже, при рівномірному русі), чисельник правої частини цього рівняння стає рівним нулю. В цьому випадку $dh/dl = 0$. За умови (10.13) або ж якщо $h = h_{кр}$, то знаменник рівняння (10.21) прирівнюється до нуля, а dh/dl буде рівним нескінченності.

Якщо $h \rightarrow h_0$, $dh/dl \rightarrow 0$, або ж вільна поверхня асимптотично наближається до лінії нормальних глибин $N-N$. Якщо $h \rightarrow h_{кр}$, то $dh/dl \rightarrow \infty$ і вільна поверхня при $h = h_{кр}$ перетинає лінію критичних глибин $K-K$ під кутом $\theta = 90^\circ$ і виникає водоспад (див. рис. 10.7) або гідравлічний стрибок (рис. 10.8). (Фактично завжди $\theta < 90^\circ$). Гідравлічним стрибком називають різке збільшення глибини потоку від значення $h' < h_{кр}$, до значення $h'' > h_{кр}$.

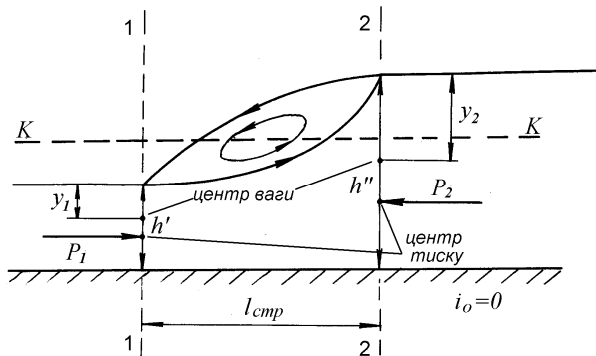


Рисунок 10.8 — Гідравлічний стрибок

Досліди свідчать, що:

- перехід спокійного потоку в бурхливий здійснюється шляхом виникнення водоспаду;
- перехід бурхливого потоку в спокійний, як правило, здійснюється через гідравлічний стрибок, характерною складовою частиною якого є зона рециркуляції.

В цій зоні рух рідини в значній мірі невпорядкований. Верхня поверхня її нерівна, хвилеподібна, а вся рідина в зоні рециркуляції аерована. Внаслідок пульсацій місцевих швидкостей в стрибку через поверхню розділу відбувається постійний обмін рідиною між зоною рециркуляції та транзитним (придонним) упорядкованим потоком рідини. Стрибок має бурхливий характер, причому він постійно коливається відносно свого середнього положення.

У стрибку місцеві втрати напору зумовлені перебудовою кінематичної структури потоку і наявністю внаслідок цього інтенсивного турбулентного перемішування рідини.

Вперше теоретичне дослідження гідравлічного стрибка було виконане Беланже і Буссинеском. Використавши теорему про кількість руху, вони отримали рівняння, яке встановлює зв'язок між глибинами потоку до і після стрибка.

Основне рівняння досконалого гідравлічного стрибка отримано для призматичних каналів при таких припущеннях (див. рис. 10.8):

- 1) довжина каналів до і після стрибка достатньо значна;
- 2) внаслідок відносно малої довжини стрибка l_{cmp} зміною геометричних відміток дна каналу нехтується, і дно каналу приймається горизонтальним;
- 3) рух до і після стрибка плавномісний, і тиск в перерізах 1-1 і 2-2 змінюється згідно з основним рівнянням гідростатики;
- 4) силами тертя на обмежуючих поверхнях потоку нехтують внаслідок малої довжини стрибка l_{cmp} ;
- 5) при $i_0 \approx 0$ проекція сили ваги на напрям руху рідини не враховується.

Рівняння кількості руху стосовно потоку рідини на ділянці 1-2 має вигляд (див. рис. 10.8)

$$\beta_2 \rho v_2^2 S_2 - \beta_1 \rho v_1^2 S_1 = \rho g y_1 S_1 - \rho g y_2 S_2, \quad (10.22)$$

де β — коефіцієнт Буссінєска;
 y — глибина розміщення центра мас перерізу потоку площею S .

Маючи на увазі, що витрата рідини

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (10.23)$$

рівняння (10.22) набуває кінцевого вигляду основного рівняння гідравлічного стрибка

$$\beta_1 \frac{Q^2}{gS_1} + S_1 y_1 = \beta_2 \frac{Q^2}{gS_2} + S_2 y_2, \quad (10.24)$$

в якому вираз

$$\beta \frac{Q^2}{gS} + Sy = \Pi(h) \quad (10.25)$$

зветься стрибковою функцією.

Оскільки середні значення $\beta = 1,037$ і $\alpha \approx 1,1$ мало відрізняються між собою, то в розрахунках приймають $\beta = \alpha$.

З рівняння (10.24) випливає, що стрибкова функція $\Pi(h)$ має одне і те саме значення в обох перерізах стрибка, тобто $\Pi(h') = \Pi(h'')$. Цією властивістю і користуються при визначенні взаємних глибин, якщо одна з них відома, а також при визначенні втрат енергії в стрибку (рис. 10.9). На цьому рисунку показано приклад знаходження взаємної глибини h'' спокійного потоку при відомій глибині бурхливого потоку h' , а також енергії потоку в перерізах 1-1 E_1 та 2-2 E_2 . Різниця енергій ($E_1 - E_2$) дорівнює втратам питомої енергії в стрибку.

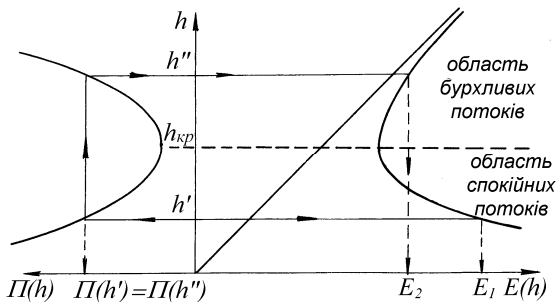


Рисунок 10.9 — Визначення параметрів гідравлічного стрибка

Для прямокутного призматичного каналу основне рівняння стрибка, маючи на увазі, що $S = Bh$ та $y = 0,5h$, може бути розв'язане відносно h' і h'' , а саме:

$$h' = \frac{h''}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \frac{h_{кр}}{h''}} - 1 \right], \quad (10.26)$$

$$h'' = \frac{h'}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \frac{h_{кр}}{h'}} - 1 \right]. \quad (10.27)$$

Дослідами встановлено, що досконалий гідравлічний стрибок утворюється при $h''/h' \leq 2$, перехід з бурхливого стану в спокійний здійснюється у вигляді ряду хвиль, поступово згасаючи в напрямі руху рідини.

Знайдемо місце розташування гідравлічного стрибка в призматичному каналі при зміні геометричного нахилу і умовах $i_{01} > i_{кр}$; $i_{02} < i_{кр}$; $h_{01} < h_{кр}$; $h_{02} > h_{кр}$ (рис. 10.10).

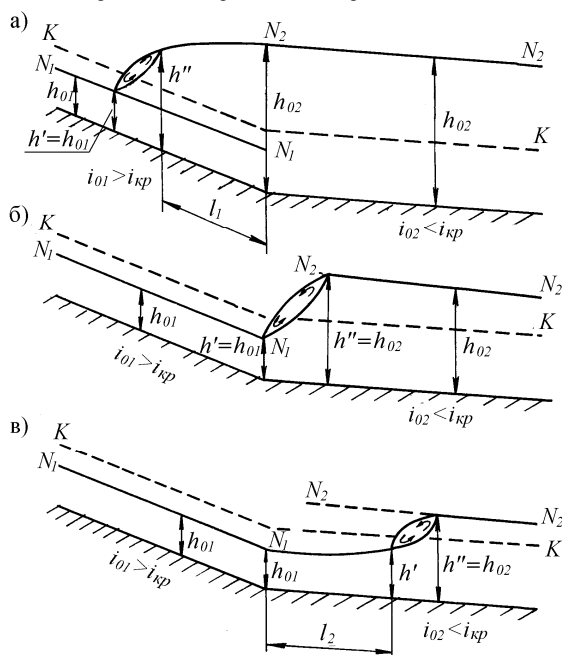


Рисунок 10.10 — До визначення місця розташування гідравлічного стрибка

Для цього визначається глибина h'' як взаємна з глибиною h_{01} , користуючись рівнянням $\Pi(h_{01}) = \Pi(h'')$, або стрибкові функції при глибинах h_{01} і h_{02} , тобто $\Pi(h_{01})$ і $\Pi(h_{02})$. Після порівняння між собою глибин h'' і h_{02} або значень стрибкових функцій $\Pi(h_{01})$ та $\Pi(h_{02})$, робиться висновок про місце виникнення стрибка.

Якщо $h'' < h_{02}$ і $\Pi(h_{01}) = \Pi(h'') < \Pi(h_{02})$, то в цьому випадку енергія спокійного потоку настільки велика, що він затоплює частинку ділянки бурхливого потоку в каналі 1 (див. рис. 10.10, а).

Якщо $h'' = h_{02}$ і $\Pi(h_{01}) = \Pi(h'') = \Pi(h_{02})$, то гідравлічний стрибок утворюється на початку каналу 2 (див. рис. 10.10, б). Такий стрибок зветься насунутим.

Якщо $h'' > h_{02}$ і, отже, $\Pi(h_{01}) = \Pi(h'') > \Pi(h_{02})$, то гідравлічний стрибок буде відігнаний і утворюється на відстані l_2 від каналу 1 (див. рис. 10.10, в). На ділянці l_2 глибина потоку вздовж каналу зростає. Стрибок утворюється в перерізі, в якому глибина h' буде взаємна з нормальною глибиною h_{02} . Тому h' можна визначити, використовуючи рівняння $\Pi(h') = \Pi(h_{02})$.

10.7 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Що таке безнапірна течія рідини?
- 2) Як визначити витрату і швидкість безнапірної течії?
- 3) Який переріз потоку є гідравлічно найбільш вигідний?
- 4) Що таке питома енергія перерізу?
- 5) Як визначити критичну глибину перерізу?
- 6) Чим відрізняється бурхливий потік від спокійного?
- 7) Як формується бурхливий потік?
- 8) Що таке гідравлічний стрибок?
- 9) Як визначити місце розташування гідравлічного стрибка?

Контрольні тестові завдання

1. Гідравлічний стрибок виникає:
 - а) при зміні напрямку потоку рідини;
 - б) при переході від бурхливого потоку до спокійного;
 - в) при переході від спокійного потоку до бурхливого;
 - г) при збільшенні геометричного нахилу каналу;

д) якщо глибина потоку стає менша за критичну глибину.

2. У випадку рівномірної безнапірної течії рідини

- а) глибина потоку плавно збільшується;
- б) глибина потоку плавно зменшується;
- в) лінія вільної поверхні паралельна лінії дна;
- г) гідравлічний нахил потоку менший за геометричний нахил;
- д) гідравлічний нахил потоку більший за геометричний нахил.

3. Для прямокутного каналу гідравлічно найбільш вигідним є переріз, в якому співвідношення між глибиною і шириною потоку рівне:

- а) 0,25 б) 0,5 в) 0,75 г) 1,0 д) 1,5

4. Виберіть правильне положення:

- а) Енергія бурхливого потоку завжди більша за енергію спокійного потоку.
- б) Глибина бурхливого потоку менша за критичну глибину.
- в) Глибина спокійного потоку менша за критичну глибину.
- г) Спокійний попік менш глибокий, ніж бурхливий.
- д) Для рівномірного бурхливого потоку $Fr < 1$.

5. Виберіть правильне положення:

- а) Для гідравлічно найбільш вигідного живого гідравлічний радіус R_c буде найбільшим, а змочений периметр — найменшим.
- б) Потоки, глибина яких менша від критичної, називаються бурхливими.
- в) Коефіцієнт Шезі залежить від шорсткості, геометричної форми і розмірів поперечного перерізу каналу.
- г) В потоці з критичною глибиною величина питомої енергії перерізу максимальна.
- д) Перехід спокійного потоку в бурхливий здійснюється шляхом виникнення водоспаду.

11 УСТАЛЕНИЙ РУХ ГАЗОРІДИННИХ СУМІШЕЙ В ТРУБАХ

Розв'язок багатьох технологічних задач видобування, промислового збору і транспортування продукції газоконденсатних та газонафтових родовищ неможливий без виконання гідродинамічних розрахунків течії газорідинних сумішей (ГРС) в трубах. Крім цього, гідродинаміка ГРС має широке застосування в енергетиці, хімічній, атомній, авіаційній та інших галузях промисловості.

Процеси течії ГРС в трубах є предметом широких теоретичних і експериментальних досліджень в усіх промислово розвинутих країнах світу. Однак сучасні методи розрахунку течії ГРС не мають ще того рівня обґрунтування і точності, який досягнутий в гідродинаміці однофазних потоків.

Початковий період досліджень в області гідродинаміки ГРС характеризується використанням в основному емпіричних методів розрахунку втрат тиску залежно від параметрів потоку і діаметра трубопроводу.

В 40-50-х роках 20-го століття починається розроблення методів узагальнення дослідних даних, класифікації структур руху ГРС і теоретичних основ газорідинних течій.

Розвиток теорії гідродинаміки ГРС вплинув на вдосконалення методів експериментальних досліджень. Ефективним виявився критеріальний метод обробки даних, який впливає з основних рівнянь гідродинаміки сумішей, і в теперішній час використовується як найбільш обґрунтований і поширений.

Теоретично обґрунтована необхідність окремого вивчення кількісних і якісних залежностей для усіх візуально відомих форм течії ГРС. Сучасні інженерні методи розрахунку ґрунтуються на експериментальних і теоретичних дослідженнях з застосуванням методу окремого вивчення структур течії.

11.1 Властивості газорідинних сумішей

Газорідинну суміш розглядають як двофазний потік, в якому газова фаза є сумішшю реальних газів і насичених парів рідини, тобто фази перебувають в термодинамічній рівновазі, і масові витрати їх є незмінними.

Характерною особливістю ГРС є змінність у просторі і часі поверхонь їх розділу. Ця особливість руху ГРС пояснюється, головним чином, різницею густин фаз і є причиною різноманітності форм (структур) течії. Тому закономірності руху ГРС значно складніші від течії однорідної рідини (газу).

Крім різноманітності форм течії, турбулентний потік ГРС характеризується значними коливальними рухами та довготривалими пульсаціями тиску, які в декілька разів перевищують пульсації тиску в однорідному турбулентному потоці. Тому всі фізичні величини, що описують газорідний рух, осереднюються в просторово-часових координатах. В тому ж розумінні вживається термін “усталений рух”. Оскільки витрата газу або рідини через довільний переріз труби змінює своє значення в різні моменти часу, відхиляючись від середніх значень в ту чи іншу сторону, то для кожної форми течії існує такий мінімальний проміжок часу, протягом якого ця витрата може вважатись сталою, і надалі всі величини вживаються саме в такому розумінні. Тобто розглядаються усереднені в часі параметри потоку ГРС.

У випадку усталеного руху однорідної рідини в каналі характер турбулентності змінюється незначно, а при русі ГРС зміна швидкості фаз призводить до перебудови структури течії навіть на незначній довжині, особливо у випадку складної форми каналу.

Зміна густини, в'язкості, поверхневого натягу та концентрації суміші зумовлюють закономірності, яких немає при течії однорідних рідин.

При малих швидкостях суміші гравітаційні сили суттєво впливають на структуру течії, величину відносної швидкості, опору та пульсацій тиску. Тому, наприклад, течія суміші в каналах, по-різному розташованих в просторі, на відміну від однорідної течії, не відповідає одним і тим самим закономірностям.

Розглянемо основні параметри, які характеризують течію газорідної суміші.

Дійсна об'ємна концентрація газу в ГРС рівна відношенню миттєвої площі живого перерізу газу до загальної площі живого перерізу

$$\varphi = \frac{S_c}{S}, \quad (11.1)$$

де S_2 — миттєва площа живого перерізу потоку газу;
 S — площа живого перерізу ГРС в трубі.
 Тоді дійсна об'ємна концентрація рідини

$$1 - \varphi = \frac{S_p}{S_c}. \quad (11.2)$$

Дійсна густина ГРС

$$\rho_c = \varphi \rho_g + (1 - \varphi) \rho_p, \quad (11.3)$$

де ρ_g і ρ_p — відповідно густина газу та рідини при середньому тискові і середній температурі суміші в трубопроводі.
 Середня швидкість ГРС визначається з рівняння витрат

$$w_c = \frac{Q_c}{S} = \frac{Q_p + Q_g}{S}, \quad (11.4)$$

де Q_c , Q_g і Q_p — відповідно витрата суміші, газової і рідинної фази.

Дійсні швидкості газу і рідини відповідно дорівнюють

$$w_g = \frac{Q_g}{S_g}; \quad w_p = \frac{Q_p}{S_p}. \quad (11.5)$$

Характерним параметром газорідних потоків є відносна швидкість фаз

$$w_{\text{в}} = w_g - w_p,$$

яку називають ще швидкістю “ковзання” фаз. Її величина залежить від співвідношення густини та в'язкості фаз, коефіцієнта поверхневого натягу на межі поділу фаз, концентрації фаз, структури потоків, напрямів руху суміші та градієнта тиску. При висхідному русі суміші в трубах напрям руху фаз і градієнтів тиску співпадає і $w_{\text{в}} > 0$, тобто швидкість газу більша, ніж швидкість рідини. При низхідному русі ГРС напрями руху суміші та градієнта тиску протилежні, і $w_{\text{в}} < 0$.

Об'ємні витратні концентрації газової і рідкої фази відповідно рівні

$$\beta = \frac{Q_z}{Q_c}, \quad 1 - \beta = \frac{Q_p}{Q_c}. \quad (11.6)$$

Виходячи з рівняння об'ємної витрати потоку

$$w_c S = w_z S_z + w_p S_p \quad (11.7)$$

і з врахуванням залежностей $w_g = w_z - w_p$, (11.1) і (11.2), взаємозв'язок між дійсною і витратною об'ємними концентраціями газу описується рівнянням

$$\beta = \varphi \left(1 + (1 - \varphi) \frac{w_g}{w_c} \right). \quad (11.8)$$

З рівності (11.8) випливає, що залежно від знака v_g витратні концентрації фаз можуть бути більшими, меншими і рівними дійсним.

Внаслідок “ковзання” фаз дійсний динамічний тиск визначається для кожної фази окремо. З врахуванням частки живого перерізу газу в потоці ГРС дійсний динамічний тиск газу

$$P_{\text{дин } z} = 0,5 w_z^2 \rho_z \varphi, \quad (11.9)$$

а з врахуванням залежностей (11.1), (11,4), (11.5) і (11.6)

$$P_{\text{дин } z} = 0,5 w_c^2 \frac{\beta^2}{\varphi}. \quad (11.10)$$

Аналогічно для рідини

$$P_{\text{дин } p} = 0,5 w_c^2 \frac{(1 - \beta)^2}{1 - \varphi}. \quad (11.11)$$

Тоді дійсний динамічний тиск ГРС з врахуванням (11.10) та (11.11) дорівнює

$$P_{\text{дин } c} = P_{\text{дин } z} + P_{\text{дин } p} = 0,5 w_{cm}^2 \left(\frac{\beta^2}{\varphi} \rho_z + \frac{(1 - \beta)^2}{1 - \varphi} \rho_p \right). \quad (11.12)$$

Швидкість розповсюдження малих імпульсів тиску (швидкість звуку) в ГРС за відсутності масообміну між фазами визначається з врахуванням приросту питомого об'єму ГРС

$$d\nu_c = d\nu_p + d\nu_z = -\frac{\nu_c(1-\varphi)dp}{K_p} - \frac{\nu_c\varphi dp}{K_z}.$$

Тоді

$$\frac{d\nu_c}{dp} = -\nu_c \left(\frac{1-\varphi}{K_p} + \frac{\varphi}{K_z} \right), \quad (11.13)$$

де $d\nu_p$ і $d\nu_z$ — прирости питомих об'ємів відповідно рідини і газу; K_p і K_z — модулі об'ємного стиснення рідини і газу.

Враховуючи, що $\nu_c = \rho_c^{-1}$ та $K_z = np$, де n — об'ємний показник політропи газу, запишемо рівняння (11.13) у такому вигляді

$$\frac{d\rho_c}{dp} = \rho_c \left(\frac{1-\varphi}{K_p} + \frac{\varphi}{np} \right).$$

Швидкість звуку

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Тоді з врахуванням (11.2) швидкість звуку в достатньо гомогенній ГРС

$$c = \left\{ (\varphi\rho_z + (1-\varphi)\rho_p) \left(\frac{1-\varphi}{K_p} + \frac{\varphi}{np} \right) \right\}^{-0,5}. \quad (11.14)$$

Якщо знехтувати масою газу, і, вважаючи рідину абсолютно нестисливою, формула (11.14) дещо спрощується:

$$c_c \approx \left(\frac{np}{\varphi(1-\varphi)\rho_p} \right)^{1/2}. \quad (11.15)$$

Мінімальна швидкість звуку існує при $\varphi \approx 0,5$. При завершеному теплообміні між фазами ($n=1$) та нормальному атмо-

сферному тискові згідно з (11.15) у водоповітряній суміші $c_{c \min} \approx 20$ м/с.

Таким чином, на відміну від однорідних середовищ швидкість звуку в ГРС суттєво залежить від значення тиску і може бути на 1-2 порядки меншою порівняно з швидкістю звуку в однорідному середовищі.

11.2 Структури потоків газорідних сумішей

Внаслідок великої кількості різнорідних факторів існує значна різноманітність структур у потоках ГРС. Згідно з візуальними спостереженнями найбільш характерними формами потоків ГРС є:

- розшарована з гладкою або хвилястою поверхнею розділу фаз;
- пробкова, що характеризується чергуванням газових і рідинних пробок різних розмірів і форм;
- емульсійна пінна, в якій газ рівномірно розподілений в потоці у вигляді дрібних бульбашок, розділених тонкими плівками рідини;
- кільцева, при якій основна частина рідини рухається по стінках труби, а всередині рухається газове ядро;
- дисперсна, яка характеризується рівномірним розподілом дрібних крапель рідини в потоці газу.

Структура потоку визначається сукупністю параметрів:

- фізичних властивостей фаз (густини, в'язкості, поверхневого натягу на межі поділу фаз);
- розташуванням трубопроводу в просторі та його діаметра;
- витратою фаз та їх співвідношенням.

Наприклад, розшарована структура може існувати лише в горизонтальному та низхідному потоках. Емульсійна структура утворюється за наявності в рідині достатньої кількості природних або штучних емульгаторів.

Слід звернути увагу, що у випадку транспорту нафти зниження тиску вздовж трубопроводу є причиною розгазування нафти та утворення піни, що, в свою чергу, обмежує завершеність гравітаційного поділу фаз. Це є причиною деякої відміни структур нафтогазового і водоповітряного потоків. В останньому масообмін між фазами практично відсутній.

Для заданого співвідношення фаз форма течії ГРС в трубопроводі визначається критерієм стійкості Кутателадзе

$$\text{Ku} = w_c \left(\frac{\rho_c^2}{(\rho_p - \rho_z) g \sigma} \right)^{1/4}. \quad (11.16)$$

де σ — коефіцієнт поверхневого натягу на межі поділу рідини з газом.

Так, границі переходу від розшарованої структури потоку до пробкової відповідає критичне значення критерію Кутателадзе, що визначається за формулою

$$\text{Ku}_{кр} = \frac{2,25}{1 - \beta} \left(1 + 0,2 \left(\frac{\sin \theta}{\lambda_p} \right)^{1/2} \right), \quad (11.17)$$

де θ — кут нахилу трубопроводу до горизонту, λ_p — коефіцієнт гідравлічного опору при безнапірній течії рідини.

Якщо $\text{Ku} < \text{Ku}_{кр}$, то в трубопроводі існує пробкова структура, а якщо $\text{Ku} > \text{Ku}_{кр}$ — розшарована.

В трубопроводах систем нафтогазозбору, де реалізуються умови $\sigma \approx idem$, $(\rho_p - \rho_z)/\rho_p \approx 1$ та $d \geq 0,05$ м, достатню точність розрахунків дає методика ВДНІГазу. Ця методика для узагальнення дослідних результатів замість критерію Кутателадзе використовує критерій Фруда:

$$\text{Fr}_c = \frac{w_c^2}{gd}. \quad (11.18)$$

Межа переходу від кільцевої структури до пробкової або розшарованої визначається за допомогою величини

$$\Gamma_{кр} = \frac{8,2 - 0,017 \bar{\mu}^{-0,8}}{\left(\text{Re}_z \text{Fr}_c \frac{\rho_z}{\rho_p - \rho_z} \right)^{1/2}} e^{(8+62\bar{\mu})\beta_p}, \quad (11.19)$$

де $\bar{\mu} = \mu_z / \mu_g$ — приведена по воді в'язкість газової фази;

$$\text{Re}_z = u_c d \rho_z / \mu_z \quad (11.20)$$

Якщо $\Gamma_{кр} > 1$, то структура потоку пробкова або розшарована, а якщо $\Gamma_{кр} \leq 1$ — кільцева. Границю поділу між пробковою та розшарованою структурами визначають за залежністю

$$\text{Fr}_{кр} = \frac{0,2 + 2\lambda_p^{-1} \sin \theta}{(1 - \varphi)^2} e^{-2,5\varphi}. \quad (11.21)$$

Тут

$$\lambda_p = 0,067 \left(\frac{158}{\text{Re}_p} + \frac{2\Delta e}{d} \right)^{0,2}, \quad (11.22)$$

$$\text{Re}_p = \frac{\rho_p d}{\mu_p} \left(\frac{2gd \sin \theta}{\lambda_p} \right)^{1/2}. \quad (11.23)$$

Значення λ_p знаходять методом послідовних наближень залежно від числа Рейнольдса шляхом розв'язку рівнянь (11.22) і (11.23).

Якщо $\text{Fr}_c > \text{Fr}_{кр}$, то в трубопроводі існує пробкова структура потоку, якщо $\text{Fr}_c < \text{Fr}_{кр}$ — розшарована.

Слід мати на увазі, що вказані структури потоку та залежності отримані для ділянок трубопроводів з усталеною структурою. Після місцевих опорів (колін, засувки тощо) диспергація газу в потоці зростає, і структура потоку відновлюється на ділянках труб довжиною, в окремих випадках, до 100 діаметрів.

Зауважимо, що явище стабілізації потоку ГРС вивчено ще недостатньо. На практиці відомі випадки застосування діафрагм як пристрою для штучної диспергації скупчень рідини в промислових газопроводах і подальшого транспорту її як ГРС протягом багатьох кілометрів.

Для потоків ГРС характерні також пульсації тиску з певною амплітудою p_a і частотою. Дослідним шляхом нагромаджені і узагальнені результати спостережень за пульсаціями тиску під час експлуатації промислових нафтогазопроводів діаметром від 0,05 до 0,5 м при тисках 2,5...3,0 МПа.

Хвилі тиску, які розповсюджуються в трубопроводі із швидкістю звуку, можуть викликати коливання трубопроводу, особливо за наявності резонансу. Значні реактивні зусилля в

трубопроводі можуть виникнути також внаслідок наявності різких поворотів, розгалужень тощо.

Емпірична формула для розрахунку амплітуди тиску має вигляд

$$p_a = 40g\rho_p d \beta(1 - \beta)Fr_c e^{-[0,067(1-\beta)Fr_c]^3}. \quad (11.24)$$

При експлуатації нафтогазопроводів необхідно забезпечити співвідношення

$$\frac{P_a}{P_{сер}} \leq \delta_p. \quad (11.25)$$

де $p_{сер}$ — середнє значення робочого тиску в трубопроводі;

δ_p — допустима нерівномірність пульсацій тиску (для промислових трубопроводів $\delta_p = 0,01$).

Найбільші за амплітудою пульсації тиску і інтервали часу для осереднення параметрів потоку відповідають області переходу від розшарованої до пробкової структури потоку. Встановлено, що із збільшенням дисперсності газу в потоці амплітуда пульсацій тиску зменшується, а частота зростає.

11.3 Гідравлічний розрахунок трубопроводів

Оскільки немає ще розв'язку системи рівнянь, які описують течію ГРС в трубопроводах змінного профілю, то їх гідравлічний розрахунок виконується для кожної ділянки окремо з використанням розрахункових формул для тієї структури потоку, яка формується на ній, і для середніх вздовж ділянки значень тиску і температури.

$$p_c = 0,5(p_{1c} + p_{2c}), \quad T_c = 0,5(T_{1c} + T_{2c}). \quad (11.26)$$

Індекси 1 та 2 відповідають початку і кінцю розрахункової ділянки.

Втрати тиску на розрахунковій ділянці

$$\Delta p_c = \Delta p_g + \Delta p_{мер} + \Delta p_{м.о.}, \quad (11.27)$$

де Δp_g , $\Delta p_{мер}$ і $\Delta p_{м.о.}$ — перепади тиску на подолання сил тяжіння, тертя та гідравлічні втрати тиску в місцевих опорах. Загальний перепад тиску в трубопроводі

$$\Delta p_c = \sum_{i=1}^n \Delta p_{ci}, \quad (11.28)$$

де i — номер розрахункової ділянки;

n — кількість розрахункових ділянок.

Для розрахунку втрат тиску на тертя існують методики Локкарта, Мартинеллі, Бейкера, Баксенделла, Ендрюса, Дахлера, Ітона, Беггса і Брілла, ГНІ (Грозненського нафтового інституту), ВНДІГазу (Всеросійського науково-дослідного інституту газу та газових технологій). Однією з найбільш досконалих є методика ВНДІГазу, яка дозволяє виконувати розрахунки в широкому діапазоні змін параметрів потоку.

Методика ВНДІГазу ґрунтується на теоретичних дослідженнях і лабораторних експериментах, виконаних з використанням суміші типу повітря-вода, повітря-водяні розчини гліцерину, повітря-масло. Перепади тиску визначаються окремо для низхідної та висхідної ділянок трубопроводу.

11.3.1 Низхідна течія рідини

Перепад тиску на розрахунковій ділянці при *розширкованій структурі* визначають з формули

$$\Delta p_{мер} + \Delta p_g = \lambda_2 \frac{l}{D} \frac{w_2^2}{2} \rho_2 - \rho_2 g l \sin \theta, \quad (11.29)$$

де $D = \frac{\pi d}{\psi} \varphi$ — гідравлічний діаметр потоку газу;

ψ — параметр, який знаходять шляхом розв'язку рівняння

$$\pi \varphi = (\psi - 0,5 \sin 2\psi), \quad (11.30)$$

$$\varphi = 1 - 2,63 \left(\frac{Fr_c (1 - \beta)}{0,02 + \sqrt{|\sin \theta|}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_p - \rho_2} \right)^{1/2}. \quad (11.31)$$

Значення w_c , w_2 і Fr_c розраховують за формулами (11.4), (11.5) і (11.18); λ_2 — коефіцієнт гідравлічного опору газу, який обчислюють за формулою

$$\lambda_z = 0,067 \left(\frac{158}{\text{Re}_z} + \frac{2\Delta_e}{d} \right)^{0,2}, \quad (11.32)$$

в якій

$$\text{Re}_z = \frac{4Q_z \rho_z}{\psi d \mu_z}.$$

У формулі (11.29) перша складова характеризує втрати тиску на подолання сил тертя, а друга — сил гравітаційного тяжіння.

Перепад тиску на розрахунковій ділянці при пробковій та кільцевій структурах потоків знаходять за формулою

$$\Delta p_{\text{тер}} + \Delta p_{\text{см}} = \left[\lambda_c \frac{w_c^2}{2d} \left(\frac{(1-\beta)^2}{1-\varphi} \rho_p + \frac{\beta^2}{\varphi} \rho_z \right) - \rho_c g |\sin \theta| \right] l. \quad (11.33)$$

Густину суміші ρ_c знаходять за формулою (11.3).

В цих формулах при пробковій структурі потоку дійсний вміст рідини

$$1 - \varphi = 1 - k_\mu \beta, \quad (11.34)$$

де k_μ — коефіцієнт, який враховує в'язкість рідини

$$k_\mu = \begin{cases} 0,35 + 1,4\bar{\mu}^{0,25} & \text{при } \bar{\mu} = \mu_z / \mu_g \leq 0,01 \\ 0,77 + 0,23\bar{\mu}^{0,25} & \text{при } \bar{\mu} = \mu_z / \mu_g > 0,01 \end{cases} \quad (11.35)$$

Коефіцієнт гідравлічного опору потоку ГРС

$$\lambda_c = \left(3 - 1,26a - 2a \lg \left[\frac{2\Delta_e}{d} + \frac{18,7}{\text{Re}_p \sqrt{\lambda_p}} \right] \right)^{-2}, \quad (11.36)$$

де

$$a = \left(1 + 18,8(1 - k_\mu)^2 \left[\frac{\beta}{1 - \beta} \right]^2 \right)^{-0,5}, \quad (11.37)$$

$$\text{Re}_p = \frac{w_c d \rho_p}{\mu_p}, \quad (11.38)$$

а λ_p знаходять за формулою (11.22).

У формулі (11.33) при кільцевій структурі потоку

$$1 - \varphi = \left\{ 1 - \left(1 + 3,84 \cdot 10^{-6} \text{Re}_p \text{Fr}_c \frac{\rho_z}{\rho_p - \rho_z} |\sin \theta|^{-1,66} \right)^{-1} \right\} \times \quad (11.39)$$

$$\times 55(1 - \beta)^{0,5} \left(\text{Re}_p \text{Fr}_c \frac{\rho_z}{\rho_p - \rho_z} \right)^{-1/3},$$

$$\lambda_c = \lambda_p \left(1 + 0,0031 \left[\text{Re}_z \text{Fr}_c \frac{\rho_p - \rho_z}{\rho_z} \right]^{1/3} \right) \times \quad (11.40)$$

$$\times \exp \left\{ -15 \left(\frac{\rho_z}{\rho_p} + 1 - \beta \right) \right\} \cdot 10 \sqrt{1 - \beta},$$

де Re_p , λ_p , Fr_c і Re_z знаходять відповідно за формулами (11.38), (11.22), (11.18) і (11.20).

11.3.2 Висхідна течія рідини

Перепад тиску на розрахунковій ділянці при пробковій і кільцевій структурах потоку знаходять за формулою

$$\Delta p_{\text{мер}} + \Delta p_{\text{см}} = \left[\lambda_c \frac{w_c^2}{2d} \left(\frac{(1 - \beta)^2}{1 - \varphi} \rho_p + \frac{\beta^2}{\varphi} \rho_z \right) - \rho_c g |\sin \theta| \right] l.$$

Густину суміші ρ_c знаходять за формулою (11.3).

При пробковій структурі потоку в формулі (11.41)

$$\varphi = k_\mu \beta \left[1 - \exp \left\{ -4,4 \left(\frac{\text{Fr}_c}{\text{Fr}_a} \right)^{1/2} \right\} \right], \quad (11.42)$$

$$\text{де } Fr_a = \begin{cases} 1150 \bar{\mu}^{0,79} & \text{при } \bar{\mu} < 0,001 \\ 9,8 \bar{\mu}^{0,1} & \text{при } \bar{\mu} \geq 0,001 \end{cases}, \quad (11.43)$$

а значення λ_c і k_μ розраховують відповідно за формулами (11.36) і (11.35).

При кільцевій структурі потоку в формулі (11.41)

$$1 - \varphi = \frac{1 - \varphi_0}{1 + 200(1 - \beta)} + 55(1 - \beta)^{0,5} \left(Re_p Fr_c \frac{\rho_2}{\rho_p - \rho_2} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad (11.44)$$

де $(1 - \varphi_0)$ — дійсний об'ємний вміст рідини при нульовій витраті рідини, який визначають за формулами

$$1 - \varphi_0 = \begin{cases} 0,0053(3,3 - W) \left(\frac{Re_p Fr_c \rho_2}{\rho_p - \rho_2} \right)^{\frac{1}{3}} & \text{при } W < 3,3 \\ 0 & \text{при } W \geq 3,3 \end{cases} \quad (11.45)$$

$$W = w_c \left(\frac{\rho_p - \rho_2}{\sigma g \sin \theta} \left[\frac{\rho_2}{\rho_p} \right]^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (11.46)$$

λ_c знаходять за формулою (11.40), а λ_p — (11.22).

11.3.3 Місцеві опори

Визначення втрат тиску в місцевих опорах є однією з найскладніших задач у гідродинаміці ГРС. Відносно незначний нагромаджений експериментальний матеріал ще не знайшов достатнього узагальнення. Найбільш досконало розроблені методики розрахунку втрати тиску в потоках ГРС при раптового звуженні і розширенні та течії ГРС через штуцери (циліндричні насадки) і діафрагми. В практичних розрахунках найчастіше використовуються емпіричні залежності.

Як правило, при течії ГРС через місцеві опори відбувається гомогенізація потоку, структура потоку наближається до пробкового з подробленою до мілких бульбашок газовою фазою. Після місцевого опору на ділянці стабілізації структура

потоків ГРС може відновитися до тієї, яка існувала до місцевого опору.

Для наближених оцінок втрат тиску потоків ГРС в місцевих опорах можна використовувати методики, рекомендовані для однорідних середовищ. В цьому випадку ГРС розглядається як гіпотетична однорідна рідина з густиною

$$\rho_c = (1 - \beta)\rho_p + \beta\rho_z$$

і кінематичною в'язкістю

$$\nu_c = \left(\frac{1 - \beta}{\nu_p} + \frac{\beta}{\nu_z} \right)^{-1}.$$

Число Рейнольдса при цьому дорівнює

$$\text{Re}_c = w_c d \left(\frac{1 - \beta}{\nu_p} + \frac{\beta}{\nu_z} \right).$$

11.4 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Що таке газорідна суміш?
- 2) В чому різниця між дійсною і витратною об'ємною концентрацією?
- 3) Як визначити фізичні властивості газорідної суміші?
- 4) Які існують структури потоків газорідних сумішей?
- 5) Як визначити наявність тієї чи іншої структури потоку?
- 6) Який алгоритм розрахунку низхідної течії газорідної суміші?
- 7) Який алгоритм розрахунку висхідної течії газорідної суміші?
- 8) Який підхід використовують для розрахунку втрат напору на місцевих опорах?

Контрольні тестові завдання

1. Дійсну об'ємну концентрацію газу визначають як
 - а) відношення об'ємної витрати газу до об'ємної витрати суміші;
 - б) відношення миттєвої площі живого перерізу газу до загальної площі живого перерізу потоку;
 - в) різницю загальної площі живого перерізу потоку і миттєвої площі живого перерізу газу;
 - г) відношення об'ємної витрати рідини до об'ємної витрати суміші;
 - д) відношення об'ємної витрати газу до об'ємної витрати рідини.

2. Швидкість “ковзання” фаз — це:

- а) різниця швидкостей газової і рідкої фаз;
- б) різниця швидкостей рідкої і газової фаз;
- в) відношення швидкості рідкої до швидкості газової фаз;
- г) різниця швидкості суміші і швидкості газової фаз;
- д) різниця швидкості суміші і швидкості рідкої фаз.

3. Виберіть правильне положення.

- а) В газорідних сумішах швидкість газової і рідкої фази завжди однакова.
- б) Об’ємна витратна концентрація рідкої фази визначається як відношення об’ємної витрати рідини до об’ємної витрати суміші.
- в) В газорідних сумішах швидкість звуку не залежить відзначення тиску.
- г) Витратна об’ємна концентрація газу завжди більша за дійсну об’ємну концентрацію.
- д) сума дійсної об’ємної концентрації газу і рідини менша 1.

4. Виберіть неправильне положення.

- а) Розшарована структура потоку може існувати лише в горизонтальному та низхідному потоках.
- б) При висхідній течії суміші в трубах відносна швидкість фаз $w_b > 0$.
- в) Кільцева структура потоку існує тільки у випадку висхідної течії.
- г) При низхідному русі швидкість газу менша, ніж швидкість рідини.
- д) Сума об’ємних витратних концентрацій газу і рідини рівна 1.

12 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІБНОСТІ І МЕТОДА РОЗМІРНОСТЕЙ

Гідродинамічна подібність явищ, процесів вивчається шляхом їх моделювання. Розрізняють два методи моделювання: математичний і фізичний.

Математичне моделювання здійснюється шляхом побудови абстрактної моделі стану чи руху рідини і аналітичного їх опису, без розкриття фізичного змісту.

Фізичне моделювання здійснюється за законами гідродинамічної подібності (Н. Н. Павловський, 1911 р.) на моделях, виконаних в меншому масштабі, ніж натурний взірець (гідромашини, гідротехнічні споруди) і відтворює явище, що вивчається, із збереженням його фізичної природи.

12.1 Основний закон динамічної подібності потоків

Основний закон динамічної подібності був встановлений Ісааком Ньютоном ще в 1686 р. і відносно подібності потоків рідини його можна сформулювати так: у динамічно подібних потоках діючі сили у відповідних їх точках повинні бути в однакових співвідношеннях.

Згідно з другим законом Ньютона сила

$$F = ma. \quad (12.1)$$

Враховуючи, що розмірність лінійного розміру L і часу T , маємо

$$F = \rho V \frac{L}{T^2} = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^2 \frac{L^2}{T^2} = \rho L^2 v^2. \quad (12.2)$$

Тоді для натурального потоку (індекс “н”) і його моделі (індекс “м”) повинна зберігатись умова рівності діючих сил числа Ньютона Ne

$$Ne = \frac{F_n}{F_m} = \frac{(\rho L^2 v^2)_n}{(\rho L^2 v^2)_m} = const. \quad (12.3)$$

Передумовою динамічної подібності повинна бути геометрична і кінематична подібність потоків.

Для геометричної подібності необхідно, щоб відношення будь-яких лінійних розмірів потоків, що розглядаються, були пропорційними, а кути їх напрямів — рівними.

Якщо деякий лінійний розмір натурального потоку буде L_n (рис. 12.1), а відповідний розмір моделі — L_m , то відношення

$$\frac{L_n}{L_m} = k_L \quad (12.4)$$

повинно зберігатися однаковим і для співвідношення будь-яких інших лінійних розмірів. Коефіцієнт k_L називається лінійним масштабом моделювання, який показує, у скільки разів розміри моделі зменшені порівняно з натурним взірцем.

Площі та об'єми відповідно зв'язані співвідношеннями

$$S_n = k_L^2 S_m \quad \text{і} \quad V_n = k_L^3 V_m. \quad (12.5)$$

Кінематична подібність потоків може бути тільки в геометрично подібних потоках.

Так, якщо деяка частинка рідини в натурному потоці за час t_n проходить ділянку траєкторії L_n , то відповідна їй частинка на моделі потоку за деякий інший час t_m повинна пройти відрізок траєкторії L_m , геометрично подібний відрізку L_n . При цьому відношення t_n/t_m повинно мати постійне і однакове значення для будь-яких відповідних точок обох потоків. Це відношення називається масштабом часу і позначається k_t .

Таким чином, в кінематично подібних потоках швидкості і прискорення повинні бути пропорційними у відповідних точках, а кути напрямку їх векторів рівними.

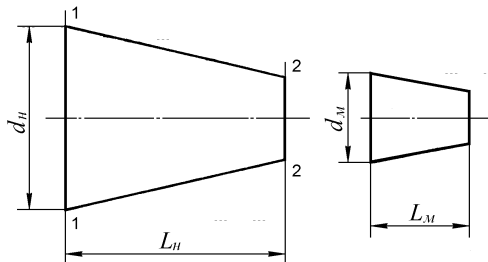


Рисунок 12.1 — Геометрична подібність потоків

Це означає, що

$$\frac{v_n}{v_m} = k_v \quad \text{і} \quad \frac{a_n}{a_m} = k_a$$

або

$$v_n = \frac{k_L}{k_t} v_m \quad \text{і} \quad a_n = \frac{k_v}{k_t} a_m. \quad (12.6)$$

При $t_n = t_m$

$$\frac{v_n}{v_m} = k_v \quad \text{і} \quad \frac{a_n}{a_m} = k_a. \quad (12.7)$$

В кінематично подібних потоках динамічна подібність буде тоді, коли сили, що діють у відповідних точках, пропорційні, а кути напряму їх векторів рівні і їх відношення рівне числу Ньютона.

Такими силами можуть бути сила внутрішнього тертя T , сила тиску F_p , сила тяжіння G , сила поверхневого натягу F_θ та ін.

12.2 Основні критерії гідродинамічної подібності потоків

Розглянемо випадок, коли із діючих сил вирішальне значення мають сили внутрішнього тертя. Це спостерігається при русі ньютонівських рідин у трубопроводі. Згідно з законом в'язкого тертя ця сила

$$T = S\tau = S\mu \frac{dv}{dy} \approx \mu L^2 \frac{v}{L} = \mu L v, \quad (12.8)$$

а їх відношення для натурального взірця і моделі

$$\frac{T_n}{T_m} = \text{Ne}. \quad (12.9)$$

Тобто

$$\frac{(\mu L v)_n}{(\mu L v)_m} = \frac{(\rho v^2 L^2)_n}{(\rho v^2 L^2)_m}. \quad (12.10)$$

Враховуючи, що $\mu = \rho\nu$, після скорочення однакових величин, маємо

$$\left(\frac{\nu L}{\nu}\right)_n = \left(\frac{\nu L}{\nu}\right)_m \quad \text{або} \quad \text{Re}_n = \text{Re}_m. \quad (12.11)$$

Рівняння (12.11) є умовою динамічної подібності при дії сил внутрішнього тертя рідини.

Таким чином, при моделюванні потоків рідини повинна виконуватись рівність (12.11), тобто повинні бути однаковими режими течії рідини як в натурі, так і на моделі.

У формулі (12.11) L — лінійна характеристика потоку. Для трубопроводів, як встановлено Осборном Рейнольдсом, це його внутрішній діаметр.

Якщо вплив в'язкості незначний, і рух рідини зумовлюється дією сил тяжіння, то в основне рівняння динамічної подібності (12.3) замість сили тертя T необхідно підставити значення сили тяжіння

$$G = mg = \rho L^3 g.$$

При цьому відношення сили тяжіння, рівне числу Ньютона, матиме такий вигляд:

$$\frac{G_n}{G_m} = \frac{(\rho g L^3)_n}{(\rho g L^3)_m} = \frac{(\rho \nu^2 L^2)_n}{(\rho \nu^2 L^2)_m} \quad (12.12)$$

або

$$\left(\frac{\nu^2}{gL}\right)_n = \left(\frac{\nu^2}{gL}\right)_m = \text{Fr}. \quad (12.13)$$

Рівність (12.13) називається законом подібності Фруда, а безрозмірна величина $\nu^2/gL = \text{Fr}$ називається числом Фруда.

Якщо вирішальний вплив має сила поверхневого натягу F_σ (наприклад, при витіканні рідини із капілярних отворів), в рівняння (12.3) замість F необхідно підставити значення сили F_σ , яка визначається за формулою

$$F_\sigma = \sigma L.$$

Тоді матимемо рівність відношення цих сил числу Ньютона

$$\frac{(\sigma L)_n}{(\sigma L)_m} = \frac{(\rho v^2 L^2)_n}{(\rho v^2 L^2)_m}, \quad (12.14)$$

а після скорочення лінійних розмірів натури і моделі

$$\frac{(\rho v^2 L)_n}{\sigma_n} = \frac{(\rho v^2 L)_m}{\sigma_m} = We \quad (12.15)$$

отримаємо закон подібності Вебера, в якому безрозмірна величина $\rho v^2 L / \sigma = We$ називається числом Вебера.

При домінуючій ролі сил тиску ($F_p = pS = \rho L^2$) після порівняння відношення $(F_p)_n$ до $(F_p)_m$ з силами інерції (числом Ньютона) одержимо число Ейлера

$$Eu = \frac{P}{\rho v^2} = \frac{P_n}{\rho_n v_n^2} = \frac{P_m}{\rho_m v_m^2}. \quad (12.16)$$

Для встановлення зв'язку між гідродинамічною подібністю і основним рівнянням гідравліки — рівнянням Бернуллі — розглянемо два напірні потоки I і II, подібні один до одного гідродинамічно (рис. 12.2), і відмітимо в них подібні перерізи 1-1 і 2-2.

Запишемо спочатку для вказаних перерізів одного із потоків рівняння Бернуллі, вважаючи, що рідина ідеальна. На рідину будуть діяти лише сили тиску та інерції.

Будемо мати

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (12.17)$$

Використовуючи рівняння витрати $v_1 S_1 = v_2 S_2$, виключимо швидкість v_1 і, перегрупувавши члени рівняння, приведемо його до безрозмірного вигляду. Для цього розділимо рівняння на $v_2^2 / 2g$, після чого одержимо

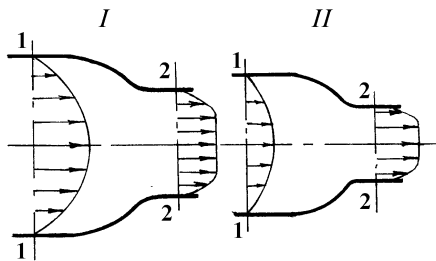


Рисунок 12.2 — Гідродинамічна подібність потоків

$$\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho v_2^2} = 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}. \quad (12.18)$$

Права частина рівняння (12.18) однакова для подібних потоків внаслідок геометричної подібності, а ліва частина є подвоєне число Ейлера $2 \cdot Eu$, однакова внаслідок динамічної подібності, і все рівняння (12.18) однакове для подібних потоків ідеальної рідини. Таким чином, для забезпечення гідродинамічної подібності напірних потоків ідеальних рідин достатньо однієї геометричної подібності.

Тепер запишемо рівняння Бернуллі для цих же перерізів 1-1 і 2-2 одного із напірних потоків в'язкої рідини, подібних гідродинамічно. Будемо мати

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \xi \frac{v_2^2}{2g}, \quad (12.19)$$

де ξ — коефіцієнт втрат енергії між перерізами.

Після зведення цього рівняння до безрозмірного вигляду одержимо

$$\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho v_2^2} = 2Eu = \alpha_2 - \alpha_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} + \xi. \quad (12.20)$$

Число Eu однакове для подібних потоків внаслідок їх динамічної подібності, коефіцієнти Кориоліса α_1 і α_2 однакові, тому що потоки кінематично подібні. Отже, однаковим буде і коефіцієнт втрат ξ , а також все рівняння.

Якщо ж розглядати подібні потоки в трубах постійного перерізу, то однаковим буде коефіцієнт гідравлічного опору λ .

Отже, в подібних напірних потоках маємо рівність безрозмірних коефіцієнтів і чисел α , ξ , λ , Eu , Re . Зміна числа Re означає, що змінюється співвідношення основних сил в потоці, в зв'язку з чим вказані коефіцієнти можуть також дещо змінитися. Тому всі коефіцієнти треба розглядати як функції основного критерію для напірних потоків в'язкої рідини — числа Рейнольдса Re .

При експериментальних дослідженнях та моделюванні напірних течій в лабораторних умовах необхідно, по-перше, забезпечити геометричну подібність моделі I і натури II, включаючи умови входу та виходу і, по-друге, зберегти рівність

чисел Рейнольдса $Re_I = Re_{II}$. Із другої умови одержуємо необхідну швидкість потоку при експерименті

$$v_I = \frac{v_{II} L_{II} \nu_I}{L_I \nu_{II}}. \quad (12.21)$$

Для однакової в'язкості $\nu_I = \nu_{II}$ швидкість при проведенні експерименту повинна бути більша від натурної в L_{II}/L_I разів. Використовуючи менш в'язку рідину (або цю ж рідину, але при підвищеній температурі), можна знизити швидкість v_I .

Крім розглянутих критеріїв (чисел) подібності, є ще ряд інших, що віддзеркалюють ту чи іншу специфіку явища. При вивченні неусталеного руху використовують критерій Струхала, при моделюванні руху повітря — критерій Грасгофа, при вивченні процесу перенесення тепла — критерій Пекле, дифузії — критерій Нуссельта та ін.

Таким чином, безрозмірні критерії (числа) характеризують відношення сил різної фізичної природи до сил інерції.

Практично при моделюванні потоків повна подібність, тобто одночасна рівність різних критеріїв подібності в моделі і в натурі, реалізується дуже складно. Тому використовується часткова динамічна подібність, коли добиваються рівності критеріїв по одній із сил. Наприклад, при усталеному русі в'язкої рідини в напірних трубах вирішальну роль відіграють сили внутрішнього тертя. В даному випадку визначальним критерієм динамічної подібності є число Рейнольдса.

При течії у відкритих руслах враховується сила тяжіння і критерієм динамічної подібності є число Фруда.

Відзначимо, що створити модель, яка б задовольняла умови моделювання за Рейнольдсом

$$\frac{(vL)_n}{\nu_n} = \frac{(vL)_m}{\nu_m} = Re \quad (12.22)$$

і Фрудом

$$\left(\frac{v^2}{gL} \right)_n = \left(\frac{v^2}{gL} \right)_m = Fr \quad (12.23)$$

неможливо, тому що зв'язок швидкостей природи і моделі різний і відповідно рівний для умов Фруда

$$v_n = v_m \sqrt{k_L},$$

Рейнольдса

$$v_n = v_m \frac{v_n}{v_m \operatorname{Re}}. \quad (12.24)$$

В той же час при дотриманні умов критерію Рейнольдса для моделі і натурі автоматично виконується критерій Ейлера.

12.3 Метод розмірностей

Метод розмірностей дозволяє встановити взаємозв'язок між окремими величинами, які не залежать від масштабів одиниць і тісно пов'язані з методом подібності.

Метод розмірностей набирає особливого значення для вивчення явищ, де аналітичне розв'язання задачі невідоме, але добре відомі фізичні фактори, від яких залежить дане явище. Цей метод дає змогу зображати величини в дослідженому явищі в безрозмірній формі, що так важливо для обробки дослідів і узагальнень їх результатів.

Важливим наслідком теорії розмірностей є так звана П-теорема, вперше сформульована М. Є. Жуковським: *рівняння, яке пов'язує між собою n розмірних величин, що характеризують дане явище, може бути приведене у вигляді залежності між (n - 3) безрозмірними комбінаціями (комплексами) цих величин.*

Розглянемо побудову критеріального рівняння за допомогою аналізу розмірності, використавши спосіб Релея. Наприклад, досліджуються два режими течії рідини. При розгляді явища виходимо насамперед з положення, що величини, які впливають на даний процес, відомі. В дослідях Рейнольдса режим руху рідини визначався такими величинами: середньою швидкістю течії v , динамічною в'язкістю μ , густиною рідини ρ і діаметром труби d . Отже, для даного явища загальна функціональна залежність виражається так:

$$W = f(v, \mu, \rho, d). \quad (12.25)$$

В даному випадку шуканий режим руху рідини не є розмірною величиною W , а безрозмірною величиною —

П-функцією чотирьох змінних. Відповідно до П-теорема ця функцію можна виразити безрозмірним комплексом, який складається в даному випадку з $n - 3 = 4 - 3 = 1$, тобто з однієї величини П. Для визначення П запишемо

$$\Pi = v^\alpha \mu^\beta \rho^\gamma d^\delta, \quad (12.26)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — показники степеня, які треба визначити.

Замінімо величини в останній рівності відповідними розмірностями цих величин

$$(\text{кг})^0 (\text{м})^0 (\text{с})^0 = (\text{м}/\text{с})^\alpha (\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}))^\beta (\text{кг}/\text{м}^3)^\gamma (\text{м})^\delta.$$

У лівій частині безрозмірна величина П приведена через розмірність основних величин у нульовому степені. Прирівнюючи показники степенів при м, кг, і с зліва і справа, отримуємо систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 3\gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases}, \quad (12.27)$$

звідки, розв'язуючи всі невідомі відносно однієї величини, наприклад, α , знаходимо, що

$$\beta = -\alpha; \quad \gamma = \alpha; \quad \delta = \alpha.$$

Таким чином, шуканий безрозмірний комплекс набирає вигляду

$$\Pi = \left(\frac{v\rho d}{\mu} \right)^\alpha, \quad (12.28)$$

де невідомий показник степеня α може мати будь-яке значення, яке відрізняється від нуля, оскільки безрозмірне число в будь-якому степені залишається безрозмірним. Найпростіше було б прийняти $\alpha = 1$, тоді отримуємо число Рейнольдса

$$\Pi = \text{Re} = \frac{v\rho d}{\mu} = \frac{vd}{\nu}. \quad (12.29)$$

Приклад 12.1. Для напірної течії рідини в трубі перепад тиску Δp залежить від її діаметра d і довжини l , еквівалентної шорсткості стінок труби Δ_e , густини рідини ρ і її в'язкості ν та середньої швидкості v . Отримати залежність перепаду тиску Δp від безрозмірних комплексів Π .

Розв'язок: За наявності семи фізично пов'язаних розмірних величин $f(l, d, \Delta_e, \rho, \mu, \nu, \Delta p) = 0$ згідно з Π -теоремою необхідно записати ($7 - 3 = 4$) чотири безрозмірні комплекси так, щоб

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0.$$

Прийmemo, що $a_1 = d$, $a_2 = \rho$, $a_3 = \nu$ і змінний комплекс a_4 в такій послідовності: $\Delta p, l, \Delta_e, \mu$. Тоді

$$\Pi_1 = \frac{d^\alpha \rho^\beta \nu^\gamma}{\Delta p}, \quad \Pi_2 = \frac{d^{\alpha_1} \rho^{\beta_1} \nu^{\gamma_1}}{l},$$

$$\Pi_3 = \frac{d^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} \nu^{\gamma_2}}{\Delta_e}, \quad \Pi_4 = \frac{d^{\alpha_3} \rho^{\beta_3} \nu^{\gamma_3}}{\mu}.$$

Прирівняємо показники степенів для розмірності L, M, T обох частин рівнянь комплексів

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma + 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \\ -\gamma + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 - 1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ -\gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 - 1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ -\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 - 3\beta_3 + \gamma_3 + 1 = 0 \\ \beta_3 - 1 = 0 \\ -\gamma_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Після розв'язання цих чотирьох систем рівнянь маємо

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2,$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 1, \quad \gamma_3 = 1.$$

Тоді запишемо функцію від таких безрозмірних комплексів

$$F\left(\frac{l}{d}, \frac{\Delta_e}{d}, \frac{\mu}{\rho \nu d}, \frac{\rho \nu^2}{\Delta p}\right) = 0,$$

або

$$\frac{\Delta p}{\rho \nu^2} = F\left(\frac{l}{d}, \frac{\Delta_e}{d}, \frac{\mu}{\rho \nu d}\right) = F\left(\frac{l}{d}, \varepsilon, \frac{1}{\text{Re}}\right),$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta_e}{d}$ — відносна шорсткість труб.

Запишемо останню рівність у такому вигляді:

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d} F_1\left(\varepsilon, \frac{1}{\text{Re}}\right) = \frac{l}{d} F_2(\varepsilon, \text{Re})$$

і введемо позначення $F_2(\varepsilon, \text{Re}) = \frac{1}{2} \lambda(\varepsilon, \text{Re})$.

Тоді
$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2},$$

або
$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Таким чином, ми отримали відому формулу Дарсі для визначення втрат напору або тиску при напірному русі рідин у трубах.

12.4 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Сформулюйте умови гідродинамічної подібності потоків.
- 2) Поясніть фізичний зміст критерію Рейнольдса. У яких випадках його слід використовувати?
- 3) Сформулюйте основний закон динамічної подібності потоків.
- 4) Назвіть основні критерії гідродинамічної подібності потоків.
- 5) Поясніть фізичний зміст критерію Фруда. У яких випадках його слід використовувати?
- 6) Суть методу розмірностей.
- 7) Що таке параметри з незалежними розмірностями?
- 8) Чому дорівнює максимально можливе число параметрів з незалежними розмірностями?

Контрольні тестові завдання

1. Умовою динамічної подібності при дії сил внутрішнього _____ рідини є $\text{Re}_n = \text{Re}_m$:

- a) тертя;
- б) опору;
- в) стиснення.

2. Якщо рух рідини зумовлюється дією сили _____, то умовою

динамічної подібності є $\left(\frac{v^2}{gL}\right)_n = \left(\frac{v^2}{gL}\right)_m = \text{Fr}$.

- a) тиску;

б) тяжіння;
в) поверхневого тиску.

3. Чи будуть дві турбулентні течії, які умовно позначені 1 і 2, подібні між собою? Труби гідравлічно гладкі.

а) будуть;
б) не будуть;
в) будуть, якщо $Re_1 = Re_2$.

4. При ламінарному режимі течії в круглій трубі перепад тиску на одиницю довжини l залежить від діаметра труби d , в'язкості ν , середньої швидкості течії v . Чи будуть дві ламінарні течії 1 і 2 подібні між собою?

а) не будуть;
б) будуть завжди;
в) будуть, якщо $Re_1 = Re_2$.

5. Чи будуть величини a_1, a_2, a_3, a_4 , розмірності яких виражаються через одиниці довжини, маси і часу розмірно незалежні?

а) будуть;
б) не будуть;
в) залежно від того, які це величини.

13 НЕНЬЮТОНІВСЬКІ РІДИНИ

13.1 Загальні положення та визначення

В'язкість ньютонівських рідин залежить лише від температури і тиску і не залежить від швидкості зсуву. Графік залежності між напруженням τ та швидкістю зсуву $\dot{\gamma}$ для ньютонівської рідини — так звана “крива течії” — на рис. 13.1 представляє пряму лінію з тангенсом кута нахилу μ і ця єдина постійна повністю характеризує рідину. Властивості цих рідин відрізняються від неньютонівських.

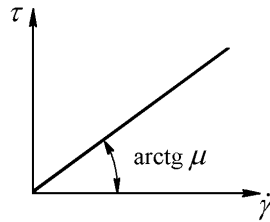


Рисунок 13.1 — Крива течії ньютонівської рідини

Ньютонівська поведінка властива рідинам, в яких в'язка дисипація енергії обумовлена зіткненням невеликих молекул. Всі гази, рідини та розчини з невеликою молекулярною масою попадають в цю категорію. Виняток складають колоїдні суспензії та розчини полімерів із значними молекулярними масами.

До неньютонівських рідин відносяться рідини, крива течії яких не є лінійною, тобто в'язкість неньютонівських рідин не залишається постійною при заданих температурі та тиску, а залежить від інших факторів, таких як швидкість деформації зсуву, конструктивних особливостей апаратури, в якій міститься рідина.

Реальні рідини з нелінійною кривою течії можна поділити на три групи:

1. Системи, для яких швидкість зсуву в кожній точці є деяка функція лише напруження зсуву в тій самій точці.

2. Більш складні системи, в яких зв'язок між напруженням та швидкістю зсуву залежить від часу дії напруження.

3. Системи, які мають властивість як твердого тіла, так і рідини, що частково проявляють пружне відновлення форми після зняття напруження (так звані в'язкопружні рідини). Всі ці три типи рідин розглядатимуться нижче.

13.2 Рідини, реологічні властивості яких не залежать від часу

Системи першого типу, властивості яких не залежать від часу, описуються таким реологічним рівнянням.

$$\dot{\gamma} = f(\tau), \quad (13.1)$$

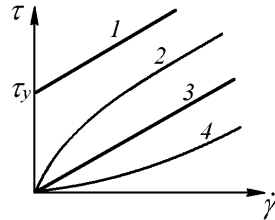
із якого випливає, що швидкість зсуву в кожній точці рідини є простою функцією напруження зсуву в цій самій точці. Такі речовини можуть бути названі неньютонівськими в'язкими рідинами. Їх поділяють на три групи залежно від виду функції в рівнянні (13.1):

а) бінгамівські пластичні рідини (бінгамівські пластики);

б) псевдопластичні рідини (псевдопластики);

в) дилатантні рідини.

Криві течії, характерні для трьох груп рідин, наведені на рис. 13.2.



1 — бінгамівський пластик;
2 — псевдопластична; 3 — ньютонівська; 4 — дилатантна рідина

Рисунок 13.2 — Криві течії для різних типів реологічно стаціонарних неньютонівських рідин

13.2.1 Бінгамівські пластики

Крива течії для цих матеріалів є пряма лінія, яка перетинає вісь напруження зсуву на віддалі τ_y від її початку. Напруження текучості τ_y є межа, перевищення якої призводить до виникнення в'язкої течії. Реологічне рівняння для бінгамівських пластиків можна записати у вигляді

$$\tau - \tau_y = \mu_p \dot{\gamma}, \quad (13.2)$$

де μ_p — пластична в'язкість, або коефіцієнт жорсткості при зсуві, чисельно рівний тангенсу кута нахилу кривої течії.

Поняття ідеального бінгамівського пластичного тіла зручне для практики, оскільки багато реальних рідин дуже близькі до цього типу. Як приклад, можна назвати шлами, бурові розчини, масляні фарби, зубну пасту. Поведінка бінгамівських пластиків пояснюється наявністю в рідині, яка перебуває у стані спокою, просторової структури, достатньо жорсткої, що-

би чинити опір будь-якому напруженню, яке не перевищує за величиною τ_y . Якщо напруження перевищує τ_y , то структура повністю руйнується і система поводитья як звичайна ньютонівська рідина при напруженнях зсуву $\tau - \tau_y$. Коли ж напруження зсуву є менше від τ_y , то структура знову відновлюється.

13.2.2 Псевдопластики

Псевдопластичні рідини не мають межі текучості, і крива течії у них показує, що відношення напруження зсуву до швидкості зсуву, тобто уявна в'язкість μ_0 , поступово зменшується з ростом швидкості зсуву. Крива течії є лінійною лише при дуже великих за величиною швидкостях деформації зсуву.

Для опису псевдопластичних рідин використовується залежність, запропонована Оствальдом та удосконалена Рейнером.

$$\tau = k\dot{\gamma}^n, \quad (13.3)$$

де k і n — сталі.

Величина k характеризує міру консистенції рідини, а величина n — степінь неньютонівської поведінки рідини. Чим більше n відрізняється від одиниці, тим чіткіше проявляються її неньютонівські властивості. Для псевдопластиків $n < 1$.

13.2.3 Дилатантні рідини

Дилатантні рідини подібні до псевдопластиків тим, що в них немає межі текучості, але їх уявна в'язкість збільшується із зростанням швидкості зсуву. Степеневий закон використовується для опису їх властивостей, але показник степеня n буде більший за одиницю.

13.3 Рідини, реологічні властивості яких залежать від часу

Більшість реальних рідин не описуються простою реологічною залежністю (13.1), що використовується для матеріалів, для яких зв'язок між напруженням та швидкістю зсуву не залежать від часу. Уявна в'язкість більш складних рідин визначається не лише швидкістю зсуву, але і часом зсуву. Рідини, властивості яких залежать від зменшення чи зростання з часом напруження зсуву, і деформуються з постійною швидкістю

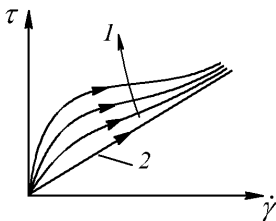
зсуву, можна класифікувати на: а) тиксотропні і б) реопектичні.

13.3.1 Тиксотропні рідини

Тиксотропними називають матеріали, консистенція яких залежить від часу зсуву і величини швидкості зсуву.

Тиксотропія є зворотним процесом і після зникнення збурень рідини її структура поступово відновлюється. Криві течії тиксотропного матеріалу, визначені безпосередньо після прикладання напруження зсуву та в стані спокою для різних проміжків часу, що відрховується від початку зсуву, представлені на рис. 13.3

Така особливість поведінки призводить до так званої гістерезисної петлі кривої течії, якщо спочатку нанести значення напружень для рівномірно зростаючої швидкості зсуву, а потім для рівномірно спадаючих значень $\dot{\gamma}$. Це ілюструється на рис. 13.4, де криві *A* і *B* побудовані для тиксотропних рідин ньютонівського та псевдопластичного типів.



1 — відновлення структури;
2 — безпосередньо після повного руйнування структури

Рисунок 13.3 — Крива течії тиксотропних матеріалів

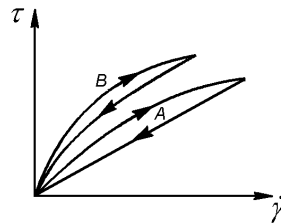


Рисунок 13.4 — Гістерезисні петлі тиксотропних рідин

13.3.2 Реопектичні рідини

Даним матеріалам властиве поступове структуроутворення при зсуві, тоді як до цього часу властивості структурованих систем пояснюються виходячи з цього, що зсув руйнує структуру.

Матеріали, в яких структура утворюється лише під дією зсуву і поступово руйнується в стані спокою, називають реопектичними. Властивість реопексії спостерігається лише при

невеликих швидкостях зсуву; якщо швидкість зсуву велика, то утворення структури не відбувається.

13.3.3 В'язкопружні рідини

В'язкопружним називають матеріал, який проявляє як пружне відновлення форми, так і в'язку течію. До таких рідин відносяться високов'язкі, наприклад, смоли.

В'язкопружні рідини описують рівнянням Максвелла:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G}, \quad (13.4)$$

де $\dot{\gamma}$ — швидкість зсуву; μ — динамічний коефіцієнт в'язкості; G — модуль зсуву.

13.4 Дослідження стаціонарно-реологічних рідин за допомогою ротаційних віскозиметрів

13.4.1 Осьово-циліндричні віскозиметри

Принцип дії таких приладів ілюструється на рис. 13.5. Досліджувану рідину заливають у зазор між двома довгими вертикальними циліндрами 2 і 3, розташованими на одній осі. Один з них обертається із змінною кутовою швидкістю, а другий циліндр є під дією закручуючого зусилля, величина якого вимірюється в процесі дослідження. Зміну крутного моменту залежно від числа обертів циліндра, що обертається, можна інтерпретувати як зв'язок між напруженням зсуву та швидкістю зсуву. Зміна швидкості зсуву в кожній точці взірця, що досліджується, залежить від ширини кільцевого зазору між обома циліндрами. Якщо щілина мала, то зміна швидкості зсуву поперек зазору буде незначною, тобто радикальна зміна вказаної величини буде незначною, якою можна нехтувати. Прилад вміщують в термостатуючу ванну.

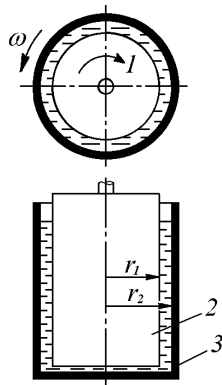


Рисунок 13.5 — Схема коаксіального циліндричного віскозиметра

13.4.2 Циліндр, що обертається в необмеженій рідині

Прилад, представлений схематично на рис. 13.6, є модифікацією осьового ротаційного віскозиметра, для якого $r_2 = \infty$.

Напруження зсуву на поверхні циліндра буде

$$\tau = \frac{G}{2\pi r_1^2}, \quad (13.5)$$

де G — крутний момент, віднесений до одиниці стовпчика рідини на внутрішньому циліндрі; r_1 — радіус циліндра.

Величина швидкості зсуву на стітці описується таким виразом

$$\gamma = \frac{4\pi \varpi}{S}, \quad (13.6)$$

де S — нахил графіка логарифмічної залежності крутного моменту від швидкості обертання.

Напруження і швидкість зсуву визначаються в одній і тій самій точці рідини. Побудова кривої течії виконується безпосередньо вимірюванням прикладеного моменту при різних кутових швидкостях обертання циліндра.

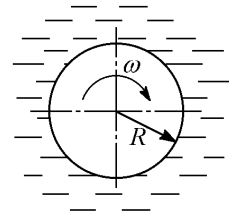


Рисунок 13.6 — Циліндр, який обертається в необмеженій рідині

13.4.3 Віскозиметр типу конус-пластина

Прилад показаний схематично на рис. 13.7. Він складається з плоскої пластини і конуса, який обертається. Вершина конуса злегка торкається поверхні пластини. Рідина заповнює вузьку щілину між ними. Контроль температури здійснюється на нижній пластині.

Якщо кут ψ дуже малий, наприклад, менший $0,5^\circ$, і середня ширина щілини невелика (менша $0,5$ мм), то досліджуваний матеріал буде піддаватися однорідному зсуву, а кінцеві ефекти будуть незначні. Тоді аналіз дослідних даних для неньютонівських рідин спрощується, оскільки уявна в'язкість буде функцією швидкості зсуву.

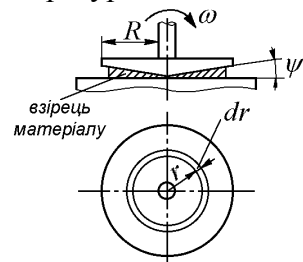


Рисунок 13.7 — Віскозиметр типу конус-пластина

13.5 Розрахунок втрат напору на тертя

13.5.1 Узагальнене число Рейнольдса

Процес інженерного розрахунку значно спрощується, якщо є універсальний метод, який можна використати для будь-яких рідин при ламінарному режимі течії незалежно від того, ньютонівські вони чи неньютонівські.

Перші спроби у цьому напрямку здійснили Обвіс, Бочер та Пігфорд. Їх метод базується на тому, що у рідин, реологічні властивості яких не залежать від часу, співвідношення між $Q/\pi r^3$ або $(8v/d)$ та $r\Delta p/2l$ буде однаковим для різноманітних діаметрів труб. Тут Q — об'ємна витрата, r , d — відповідно радіус та діаметр трубопроводу, v — середня швидкість, Δp — втрати тиску, l — довжина.

Узагальнений метод був запропонований Метцнером та Рідом. Цей метод оснований на співвідношенні Муні для напруження тертя на стінці

$$-\left(\frac{du}{dr}\right) = \frac{3n' + 1}{4n'} \cdot \frac{8v}{d}, \quad (13.7)$$

де $\frac{du}{dr}$ — градієнт швидкості;

v — середня швидкість;

d — діаметр;

n' — показник поведінки рідини.

$$n' = \frac{d(\ln d\Delta p / 4l)}{d(\ln 8v / d)}. \quad (13.8)$$

Тоді

$$\frac{d\Delta p}{4l} = k' \left(\frac{8v}{d}\right)^{n'}. \quad (13.9)$$

де k' — показник консистенції.

Коефіцієнт опору тертя C_f

$$C_f = \frac{d\Delta p / 4l}{\rho v^2 / 2}. \quad (13.10)$$

Узагальнене число Рейнольдса знаходимо з виразів (13.9) і (13.10)

$$\text{Re}' = \frac{d^{n'} v^{2-n'} \rho}{k' 8^{n'-1}}. \quad (13.11)$$

Для степеневого реологічного закону число Рейнольдса можна виразити у функції n та k , а не через n' та k' , оскільки $n' = n$

$$k' = k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n. \quad (13.12)$$

Одержимо

$$\text{Re}' = \frac{d^n v^{2-n} \rho}{\frac{k}{8} \left(\frac{6n+2}{n} \right)^{n'}}. \quad (13.13)$$

Величини k та n близькі за змістом k' та n' . Зауважимо, що коефіцієнт гідравлічного опору $\lambda = 4C_f$.

13.5.2 Визначення коефіцієнта опору

Вельтман запропонував для ньютонівських рідин аналогічний спосіб, який базується на використанні графіка залежності коефіцієнта опору від числа Рейнольдса.

В цьому випадку число Рейнольдса визначається як

$$\text{Re} = \frac{v d \rho}{\text{в'язкість}}. \quad (13.14)$$

Тут “в’язкість” для ньютонівських рідин — динамічна в’язкість, а також означає пластичну в’язкість μ_p для бінгамівських пластиків і уявну в’язкість μ для псевдопластичних та дилатантних рідин.

Тоді для ньютонівських рідин при ламінарному режимі коефіцієнт опору дорівнює

$$C_f = \frac{16}{\text{Re}}. \quad (13.15)$$

Для бінгамівських пластичних тіл коефіцієнт опору дорівнює

$$C_f = \frac{16}{\text{Re}} \frac{p}{bc}, \quad (13.16)$$

де c — відношення границі текучості до напруження тертя на стінці труби;

$p = \frac{\tau_p d}{\mu_p \nu}$ — параметр пластичності, який є мірою пластичної поведінки речовини.

У псевдопластичних та дилатантних матеріалів, для яких $\tau \approx (du/dr)^n$, коефіцієнт опору тертя виражається формулою

$$C_f = \frac{16}{\text{Re}} \left(\frac{3n+1}{4n} \right). \quad (13.17)$$

Залежність C_f від Re для даного випадку при різних значеннях p і n показана на рисунку (13.8).

Для турбулентного режиму в зоні гладкостінного тертя Додж і Метцнер запропонували таку апроксимацію формули Блазіуса для неньютонівських рідин:

$$C_f = a(\text{Re}')^{-b}, \quad (13.18)$$

де a і b є функціями лише n' .

В таблиці 13.1 наведено значення a і b для різних n' .

Таблиця 13.1 — Значення a і b для різних n' .

n'	a	b
0,2	0,0646	0,349
0,3	0,0685	0,325
0,4	0,0712	0,307
0,6	0,0740	0,281
0,8	0,0761	0,263
1,0	0,0779	0,250
1,4	0,0804	0,231
2,0	0,0826	0,213

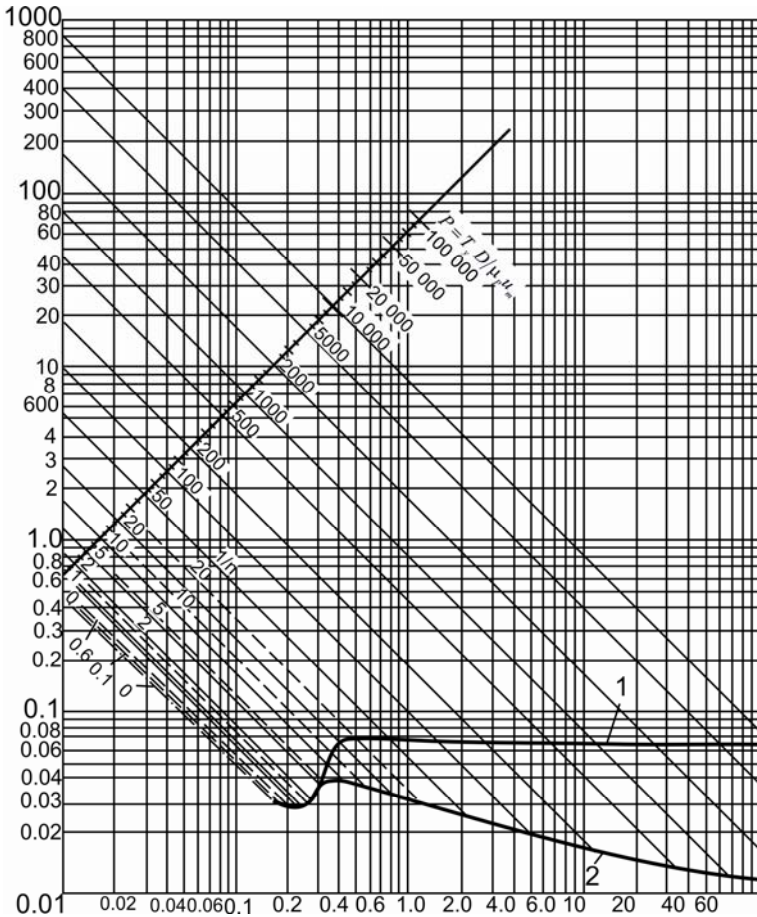
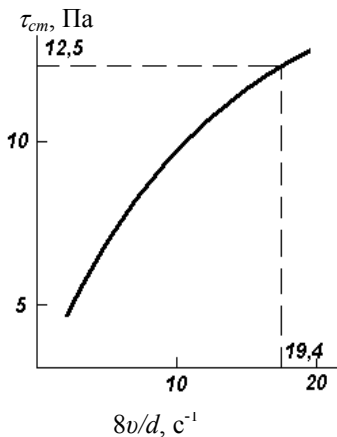


Рис.13.8 – Графік залежності коефіцієнта опору від числа Рейнольдса для ламінарної течії бінгамівських пластиків та псевдопластиків

Таким чином, при течії по трубах неньютонівських рідин втрати напору на тертя по довжині потоку можна визначати за формулою Дарсі. При цьому коефіцієнт гідравлічного опору можна знаходити за формулами, в яких число Рейнольдса замінено узагальненим числом Рейнольдса, яке враховує як в'язкі, так і пластичні властивості рідини.

13.5.3 Ламінарна течія псевдопластичних рідин

З рівняння $\tau_{cm} = k(8v/d)^n$ видно, що напруження зсуву, що діє біля стінки труби в рідині при даних значеннях k і n є функцією лише $8v/d$. Це дозволяє безпосередньо розрахувати втрати на тертя в трубопроводі будь-якого діаметра, якщо відомі експериментальні дані, одержані при вимірюванні капілярним віскозиметром або дані випробовувань безпосередньо на трубопроводі.



Приклад 13.1. Залежність $\tau_{cm} = \frac{dP}{4l}$ від

$8v/d$, яка одержана експериментально для даної нафти наведена на рис. 13.9. Знайти перепад тиску на одиницю довжини в трубопроводі діаметром $d = 0,308$ м при витраті $Q = 200$ м³/год.

Розв'язок: Середня швидкість течії рідини

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 200}{3600 \cdot 3,14 \cdot 0,308} = 0,746 \text{ м/с,}$$

$$\frac{8v}{d} = \frac{8 \cdot 0,746}{0,308} = 19,4 \text{ с}^{-1}.$$

Для цього значення знаходимо граничне напруження зсуву

$$\tau_{cm} = \frac{dP}{4l} = 12,5 \text{ Па.}$$

Отже, перепад тиску в трубопроводі на одиницю довжини

$$\frac{P}{l} = \frac{4\tau_{cm}}{d} = \frac{4 \cdot 12,5}{0,308} = 162 \text{ Па/м} = 0,162 \text{ МПа/км.}$$

Рисунок 13.9 — Експериментальна залежність граничного напруження зсуву біля стінки труби від відношення $8v/d$

13.5.4 Пластичні рідини

Відповідно з параграфом 13.5.3 перепад тиску при ламінарній течії пластичної рідини можна визначити методом, що поданий в прикладі 13.1, з використанням графіка функції

$\tau_{cm} = f(8\nu/d)$, який побудований за результатами експериментальних досліджень за допомогою екструзійного віскозиметра. При побудові реологічної кривої, що характеризує властивості рідини, перепад тиску можна розрахувати таким чином. Хедстрем показав, що коефіцієнт гідравлічного опору при течії пластичних рідин є функцією двох безрозмірних параметрів. Один з цих параметрів є число Рейнольдса, у виразі для якого замість значення динамічної в'язкості фігурує пластична в'язкість μ_p

$$\text{Re}_{nl} = \frac{\nu d \rho}{\mu_p}. \quad (13.19)$$

Другий безрозмірний параметр названий числом Хедстрема

$$\text{He} = \frac{d^2 \rho \tau_e}{\mu_p^2}. \quad (13.20)$$

Цей параметр враховує цей факт, що “тверда” центральна частина потоку зменшує вільний поперечний переріз для руху рідкої частини потоку. Для випадку течії в трубопроводі коефіцієнт гідравлічного опору можна одержати за допомогою рис. 13.10, для якого відомі значення параметрів Re_{nl} і He . Крива T дійсна для турбулентної течії, а інші криві — для ламінарної течії. Слід відмітити, що крива T дійсна для гладких труб.

Приклад 13.2. Визначити втрати тиску на тертя на одиницю довжини трубопроводу при течії рідини реологічна крива якої наведена на рисунку 13.11, якщо об'ємна витрата $Q = 200 \text{ м}^3/\text{год}$, внутрішній діаметр $d = 0,308 \text{ м}$ і густина $\rho = 880 \text{ кг/м}^3$.

Розв'язок: За реологічною кривою (рисунком 13.11) знаходимо початкове напруження зсуву $\tau_e = 8,6 \text{ Па}$ і, наприклад, при градієнті швидкості

$$\left(-\frac{du}{dr}\right) = 20 \text{ с}^{-1} \text{ за тією ж кривою знаходимо } \tau = 11,44 \text{ МПа.}$$

Тоді пластична в'язкість

$$\mu_p = \frac{11,4 - 8,6}{20} = 0,140 \text{ Па}\cdot\text{с.}$$

Швидкість течії

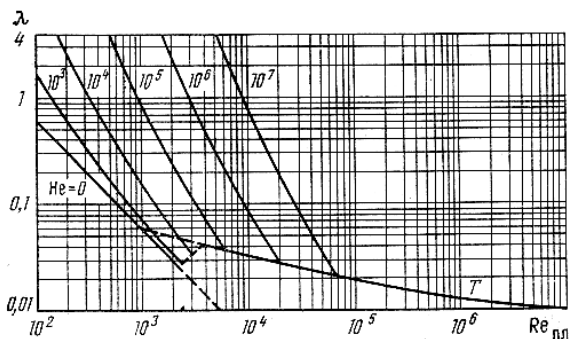


Рисунок 13.10 — Коефіцієнт гідравлічного опору пластичних рідин за Хедстремом

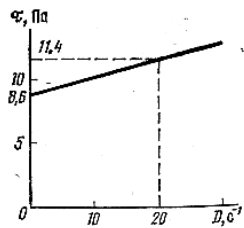


Рисунок 13.11 — Реологічна крива

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 200}{3600 \cdot 3,14 \cdot 0,308^2} = 0,746 \text{ м/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re_{пл} = \frac{v d \rho}{\mu_{пл}} = \frac{0,746 \cdot 0,308 \cdot 880}{0,140} = 1440$$

Число Хедстрема

$$He = \frac{d^2 \rho \tau_e}{\mu_{пл}^2} = \frac{0,308^2 \cdot 880 \cdot 8,6}{0,140^2} = 36600$$

Згідно з графіком залежностей коефіцієнта гідравлічного опору пластичних рідин від чисел Рейнольдса і Хедстрема (рис. 13.10) знаходимо $\lambda = 0,185$.

За формулою Дарсі втрати тиску на одиницю довжини рівні

$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2} \rho = 0,185 \frac{0,746^2 \cdot 880}{0,308 \cdot 2} = 147 \text{ Па/м} = 0,147 \text{ МПа/км.}$$

13.6 Питання і завдання для самоперевірки

- 1) Яке визначення неньютонівських рідин?
- 2) Наведіть класифікацію неньютонівських рідин.
- 3) Яким реологічним рівнянням описують течію в'язкопластичної рідини?
- 4) Скільки реологічних параметрів визначають модель степеневі рідини?
- 5) Як визначають узагальнене число Рейнольдса?
- 6) Які рідини називають тиксотропними?

- 7) Які рідини називають реопектичними?
- 8) Від яких параметрів залежить коефіцієнт опору тертя бінгамівських пластичних тіл?
- 9) Як визначають число Хедстрема?
- 10) Наведіть формулу Доджа і Метцнера для визначення коефіцієнта опору тертя.

Контрольні тестові завдання

1. Яку рідину описують реологічним рівнянням $\tau = k\dot{\gamma}^n$, $n < 1$?
 - а) дилатантну;
 - б) псевдопластичну;
 - в) ньютонівську;
 - г) в'язкопластичну.
2. В'язкопластична рідина рухається в круглій трубі. При зменшенні τ_e та незмінних інших умовах течії радіус ядра потоку
 - а) збільшується;
 - б) зменшується;
 - в) не змінюється.
3. Для визначення реологічних параметрів в'язкопластичної рідини τ_e і μ_p на ротаційному віскозиметрі необхідно провести не менше
 - а) двох дослідів;
 - б) одного дослідів;
 - в) трьох дослідів.
4. Яку рідину описують реологічним рівнянням виду $\tau = \tau_e + \mu_p \dot{\gamma}$?
 - а) дилатантну;
 - б) в'язкопластичну;
 - в) ньютонівську;
 - г) псевдопластичну.

ЛІТЕРАТУРА

- 1) Агроскин И. И. и др. Гидравлика / И. И. Агроскин, — М. : Гостоптехиздат, 1964.
- 2) Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления / А. Д. Альтшуль. — М. : Недра, 1970. — 215 с.
- 3) Богомолов А. И. Гидравлика / А. И. Богомолов, К. А. Михайлов. — М. : Стройиздат, 1972. — 648 с.
- 4) Гейер В. Г. Гидравлика и гидропривод : [учеб. для вузов] / В. Г. Гейер, В. С. Дулин, А. Н. Заря. — М. : Недра, — 1991. — 331 с. — ISBN 5-247-01007-8.
- 5) Гидравлика, гидромашины и гидроприводы : [учеб. для машиностроительных вузов] / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. ; 2-е изд., перераб. — М. : Машиностроение, 1982. — 423 с.
- 6) Гідравліка : навчальний посібник / М. П. Андріюшин, Л. В. Возняк, Р. Ф. Гімер та ін. ; за ред. Р. Ф. Гімера. — Івано-Франківськ : Факел, 2000. — 253 с. — ISBN 966-7327-14-0.
- 7) Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. — Под ред. М. О. Штейнберга. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Машиностроение, 1992. — 672 с. — ISBN 5-217-00393-6.
- 8) Константинов Ю. М. Гидравлика : учебник / Ю. М. Константинов. — К. : Вища школа, 1988. — 398 с. — ISBN 5-11-000072-7.
- 9) Константинов Ю. М. Технічна механіка рідини і газу : підручник / Ю. М. Константинов, О. О. Гіжа. — К. : Вища школа, 2002. — 277 с. — ISBN 966-642-093-7.
- 10) Левицький Б. Ф. Гідравліка. Загальний курс / Б. Ф. Левицький, Н. П. Лещій. — Львів: Світ, 1994. — 264 с. — ISBN 5-7773-0158-4.
- 11) Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Изд. 6-е., перераб. и доп. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 840 с.
- 12) Мердух М. И. Усовершенствование методов гидравлического расчета нефтепродуктопроводов / М. И. Мердух, Р.

- Ф. Гимер // *Механика жидкости и газа*. — М. : МИНХ и ГП, 1985.
- 13) Навроцький Б. І. Гідромеханіка і гідравліка в термінах і поняттях / Б. І. Навроцький. — К. : УМК ВО, 1991. — 180 с.
 - 14) Навроцький Б. І. Технічна механіка рідин : [підручник для технічних вузів] / Б. І. Навроцький, Є. І. Сухін. — К. : [Знання], 1999. — 374 с. — ISBN 966-618-056-1.
 - 15) Навроцький Б.І. Механіка рідин : [підруч. для техн. вузів] / Б. Навроцький, Є. Сухін. — К. : ДІА, 2003. — 416 с. — ISBN 966-7665-43-7.
 - 16) Рабинович Е. З. Гидравлика : Учебное пособие для вузов / Е. З. Рабинович. — М. : Недра, 1980. — 278 с.
 - 17) Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. — Сокр. пер. с англ. А. П. Юфин. — М. : Стройиздат, 1967. — 390 с.
 - 18) Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. — 10-е изд., доп. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 432 с.
 - 19) Смыслов В. В. Гидравлика и аэродинамика : Учеб. для вузов / В. В.Смыслов. — К.: Вища школа, 1979. — 336 с.
 - 20) Справочник по гидравлическим расчетам. — Под ред. П. Г. Киселева. — М. : Энергия, 1977. — 312 с.
 - 21) Терминология механики жидкости (гидромеханики). — М. : АН СССР, 1952. — 39 с.
 - 22) Угинчус А. А. Гидравлика и гидравлические машины / А. А.Угинчус. — Харьков: Издательство Харьковского университета, 1970. — 396 с.
 - 23) Чугаев Р. Р. Гидравлика : Учебник для вузов / Р. Р. Чугаев. — 4-е изд., доп. и перераб. — Л. : Энергоиздат, 1982. — 672 с.
 - 24) Шашин В. М. Гидромеханика : Учеб. для техн. вузов / В. М. Шашин. — М. : Высш. шк., 1990. — 384 с.

ДОДАТКИ

Додаток А
Латинський алфавіт

Напис	Українське звучання	Примітки
A, a	а	
B, b	б	
C, c	к/ц	c = ц — перед голосними, c = к — перед приголосними
D, d	д	
E, e	е/є	
F, f	ф	
G, g	г	г (дзвінке)
H, h	г	г (видихне)
I, i	і	
J, j	й	перед голосними
K, k	к	
L, l	л	
M, m	м	
N, n	н	
O, o	о	
P, p	п	
R, r	р	
S, s	с/з	s = з — між голосними
T, t	т/ц	t = ц — перед голосними, але не після s, t, x
U, u	у	
V, v	в	
W, w	в	в латині не буває, нім. фр. = в
X, x	кс/кз	чит. ікс, ех = екз — перед голосними, в інших випадках «екс»
Y, y	і	після приголосних чит. ігрек
Z, z	з	чит. зет
Склади букв ја, је, јо, ју = я, е, йо, ю		

Додаток Б Грецький алфавіт

Напис	Назва	Латинський напис	Примітки
Α, α	альфа	a	
Β, β	бета	b	
Γ, γ	гама	g	
Δ, δ	дельта	d	
Ε, ε	епсілон	e	
Ζ, ζ	дзета	z	
Η, η	ета	e	
Θ, θ	тета	th	
Ι, ι	йота	i	
Κ, κ	капа	k	в латинських словах частіше c
Λ, λ	лямбда	l	
Μ, μ	мю	m	
Ν, ν	ню	n	
Ξ, ξ	ксі	x	
Ο, ο	омікрон	o	
Π, π	пі	p	
Ρ, ρ	ро	rh	перед голосними
Σ, σ	сігма	s	
Τ, τ	тау	t	
Υ, υ	іпсілон	y	
Φ, φ	фі	ph	
Χ, χ	хі	ch	
Ψ, ψ	псі	ps	
Ω, ω	омега	o	

Додаток В Міжнародна система одиниць (СІ)

Величини	Одиниці		
	Назва	Позначення	
		українські	міжнародні
Основні одиниці			
Довжина	метр	м	m
Маса	кілограм	кг	kg
Час	секунда	с	s
Сила електричного струму	ампер	А	A
Термодинамічна температура	Кельвін	К	K
Сила світла	Кандела	Кд	cd
Додаткові одиниці			
Плоский кут	радіан	рад	rad
Кут тіла	стерадіан	ср	sr
Похідні одиниці			
Площа	квадратний метр	м ²	m ²
Об'єм	кубічний метр	м ³	m ³
Густина	кілограм на кубічний метр	кг/м ³	kg/m ³
Швидкість	метр за секунду	м/с	m/s
Кутова швидкість	радіан за секунду	рад/с	rad/s
Сила	Ньютон	Н	N
Тиск	Паскаль	Па	Pa
Робота, енергія, кількість теплоти	Джоуль	Дж	J
Потужність, тепловий потік	Ват	Вт	W

Додаток Г
Множники та префікси утворення кратних і дільових
одиниць та їх назва

Множник	Префікс	Позначення	
		українське	міжнародне
10^{24}	йота	Й	Y
10^{21}	зета	З	Z
10^{18}	екса	Е	E
10^{15}	пета	П	P
10^{12}	тера	Т	T
10^9	гіга	Г	G
10^6	мега	М	M
10^3	кіло	к	k
10^2	гекто	г	h
10^1	дека	да	da
10^{-1}	деци	д	d
10^{-2}	санти	с	c
10^{-3}	мілі	м	m
10^{-6}	мікро	мк	μ
10^{-9}	нано	н	n
10^{-12}	піко	п	p
10^{-15}	фемто	ф	f
10^{-18}	ато	а	a
10^{-21}	зепто	з	z
10^{-24}	йокто	й	y

Додаток Д Системи одиниць та їх зв'язок

Основні величини	Одиниці виміру системи		
	СІ	СГС	МКГСС
Довжина, l	м	см = 10^{-2} м	м
Швидкість, v	м/с	см/с = 10^{-2} м/с	м/с
Прискорення, a	м/с ²	см/с ² = 10^{-2} м/с	м/с ²
Маса, m	кг	г = 10^{-3} кг	кгс·с ² /м = 9,81 кг
Сила, $F = m \cdot a$	Н (Ньютон) = = кг·м/с ²	дин (дина) = = г·см/с ² = 10^{-5} Н	кГ = кгс = 9,81 Н
Питома вага, $\gamma = G/V$	Н/м ³	дин/см ³ = 10 Н/м ³	кгс/м ³ = 9,81 Н/м ³
Густина, $\rho = m/V$	кг/м ³	г/см ³ = 10^3 кг/м ³	кгс·с/м ⁴ = 9,81 кг/м ³
Напруження тертя, $\tau = T/S$	Па (Паскаль) = = Н/м ²	г/(см·с ²) = 0,1 Па	кгс/м ² = 9,81 Па
Коефіцієнт динамічної в'язкості, $\mu = \tau/(du/dn)$	Па·с = = кг/(м·с)	П (Пуаз) = = г/(см·с) = 0,1	кгс·с/м ² = 9,81 Па·с
Коефіцієнт кінематичної в'язкості, $\nu = \mu/\rho$	м ² /с	Ст (Стоке) = = см ² /с = 10^{-4} м ² /с	м ² /с

Додаток Е Тиск насиченої пари деяких рідин залежно від температури ($\rho_{н.п.} \cdot 10^{-3}$)

Температура, °С	Вода		Легка нафта	Бензин
	Па	кгс/м ²	кгс/м ²	кгс/м ²
0	0,87	0,089	0,350	0,650
10	1,23	0,126		0,810
20	2,34	0,238	0,800	1,090
30	4,27	0,430		1,690
40	7,37	0,750	1,400	3,210
50	12,3	1,260		3,260
60	19,9	2,030	3,800	
70	31,2	3,180		
80	47,4	4,830	8,700	
90	70,1	7,150		
100	101,3	10,330		

Додаток Ж
Середнє значення густини ρ і кінематичної в'язкості ν
деяких рідин

Рідина	Густина, кг/м ³ , при t °С		Кінематична в'язкість, Ст, при t °С			
	20	50	20	40	60	80
Вода прісна	998	-	0,010	0,0065	0,0047	0,0036
Нафта легка	884	-	0,25	-	-	-
Нафта тяжка	924	-	1,4	-	-	-
Бензин авіаційний	745	-	0,0073	0,0059	0,0049	-
Гас Т-1 (очищений)	808	-	0,025	0,018	0,012	0,010
Гас Т-2 тракторний	819	-	0,010	-	-	-
Дизпаливо	846	-	0,28	0,12	-	-
Гліцерин	1245	-	9,7	3,3	0,88	0,38
Ртуть	13550	-	0,0016	0,0014	0,0010	-
Масло						
- касторове	960	-	15	3,5	0,88	0,35
- трансформаторне	884	880	0,28	0,13	0,084	0,078
- АМГ-10	-	850	0,17	0,11	0,085	0,065
- веретенне АУ	-	892	0,48	0,19	0,098	0,059
- індустриальне 12	-	883	0,48	0,19	0,098	0,059
- індустриальне 20	-	891	0,85	0,33	0,14	0,08
- індустриальне 30	-	901	1,8	0,56	0,21	0,11
- індустриальне 50	-	910	5,3	1,1	0,38	0,16
- турбінне	-	900	0,97	0,38	0,16	0,088
- автотракторне Ки-10	-	898	5,0	1,1	0,45	0,20

ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК

А

- Атмосфера
— стандартна, 20
— технічна, 20
— фізична, 20

Б

- Бар, 19
Барія, 20
Барометр, 45

В

- В'язкість, 23
— динамічна, 24
— кінематична, 24
— пластична, 301
— уявна, 302
Вага питома, 23
Вакуумметр, 49
Ватерлінія, 70
Висота
— вакуумметрична, 50
— всмоктування, 102, 226
— геометрична, 88
— метacentрична, 70
— п'єзометрична, 88, 204
Витрата
— вагова, 78
— елементарної сирумкин, 79
— масова, 78
— об'ємна, 78, 79
— — при ламінарній течії, 120
— рідини, 78
— — через великий отвір, 188
— — через затоплений отвір, 185
— — через малий отвір, 181
— транзитна, 202
— шляхова, 202
Витратна характеристика
— — потоку, 258

- — труби, 151, 152
Витратомір Вентурі, 100
Віскозиметр
— осьово-циліндричний, 304
— типу конус-пластина, 305
Вісь плавання, 70
Водотоннажність, 68
Всмоктувальна коробка, 168
Втрати напору
— — на місцевих опорах, 156
— — на тертя
— — при ламінарній течії, 121
— — при раптовому розширенні,
158
— — у водопровідних трубах, 151

Г

- Газорідинна суміш, 273
Гідродинаміка, 74
Гідростатика, 30
Гладкість відносна, 138
Глибина потоку критична, 261, 262
Графік
— Муріна, 142
— Нікурадзе, 139
Густина, 22
— газорідинної суміші, 275

Д

- Дифузор, 155, 161
Діаграма Муді, 143
Діаметр
— необхідний, 203, 211
— оптимальний, 203, 215
Діафрагма, 164
Довжина
— еквівалентна, 173, 205
— розрахункова, 174
— шляху перемішування, 131

Е

Ежектор, 103

Енергія

— перерізу питома, 260

— питома потенціальна

— — — повна, 90

— — — положення, 90

— — — тиску, 90

Епюра

— дотичного напруження, 118

— тиску, 44

З

Закон

— Архімеда, 68

— гідростатики основний, 34

— динамічної подібності, 288

— Паскаля, 54

— сполучених посудин, 51

Залежність Освальда-Рейнера для псевдопластиків, 302

Запас плавучості, 70

Заслінка, 168

Засув, 168

Зона

— гідравлічно гладких труб, 143

— змішаного тертя, 143

— квадратичного тертя, 143

К

Кавітація, 27

Коефіцієнт

— Бусинеска, 122, 269

— в'язкості

— — динамічний, 24

— — кінематичний, 24

— витікання через насадки, 195

— витрати, 181

— — емпіричні формули, 182

— — малого отвору, 181

— — насадок, 191

— — циліндричної насадки, 191

— гідравлічного опору, 145, 147, 205, 293, 307

— — — для ламінарної течії, 121

— — — пластичних рідин, 311

— — — фізичний зміст, 233

— корисної дії гідравлічного

— тарана, 243

— Коріоліса, 96, 121, 293

— лобового опору, 247

— місцевого опору, 156

— — — всмоктувальної коробки, 169

— — — входу в трубу, 160, 165

— — — дифузора, 163

— — — діафрагми, 164

— — — заслінки дискової, 169

— — — засува, 169

— — — зварювальних стиків, 165

— — — коліна без заокруглення, 166

— — — коліна із заокругленням, 166

— — — конфузора, 163

— — — при ламінарному режимі, 171

— — — пробкового крану, 169

— — — раптового звуження, 160

— — — раптового розширення, 159

— — — системи, 172

— — — трійника, 168

— об'ємної стисливості, 25

— опору тертя, 306

— — — бінгамівських пластиків, 308

— — — дилатантних матеріалів, 308

— — — неньютонівських рідин

— — — — при ламінарному режимі, 307

— — — — при турбулентному режимі, 308

— — — псевдопластичних матеріалів, 308

— опору циліндричної насадки, 190

— стиснення струмини, 178

— температурного розширення, 26

— швидкості, 180

— — малого отвору, 180

— — насадки, 191

— Шезі, 151, 257

— шорсткості у формулі Шезі, 259

Конфузор, 155, 163

Концентрація газу

— — витратна об'ємна, 275

— — дійсна об'ємна, 274

Концентрація рідини

— — витратна об'ємна, 275

— — дійсна об'ємна, 275

Критерій

— Кутателадзе, 279

— Рейнольдса, 112

— Фруда, 279

Л

- Ламінарний підшар, 130
- — товщина, 137
- Лінія
- п'єзометричного напорю, 90
- течії, 77
- Лопатка Пельтона, 250

М

- Мановакуумметр, 51
- Манометр, 46
- U-подібний ртутний, 46
- диференціальний, 47
- мембранний, 49
- пружинний, 49
- ртутно-чашковий, 47
- Метацентр тіла, 70
- Метод
- безрозмірних параметрів, 207, 209
- графоаналітичний, 207
- Ейлера, 74
- Лагранжа, 74
- Метцнера-Ріда, 306
- перехідних напорів, 207, 211
- послідовних наближень, 207
- розмірностей, 295
- Мікроманометр, 48
- Міра консистенції, 302
- Місцевий опір, 155
- — в газорідній суміші, 286
- — звуження
- — — поступове, 155
- — — раптове, 155
- — поворот
- — — плавний, 155
- — — різкий, 155
- — простий, 155
- — розширення
- — — поступове, 155
- — — раптове, 155
- — складний, 155
- Моделювання
- математичне, 288
- фізичне, 288
- Модуль
- витрати, 151
- об'ємної пружності рідини, 25, 240
- Юнга, 240
- Момент
- інерції площини відносно осі, 59
- площини статичний, 57

- сили тертя, 127
- Мультиплікатор гідравлічний, 55

Н

- Напір, 177
- геометричний, 34, 88
- гідростатичний, 34
- змінний, 195
- інерційний
- — при обертанні потоку, 234
- — при прямолінійному русі, 232
- критичний циліндричної насадки, 193
- п'єзометричний, 34, 88
- повний, 90
- приведений, 180
- статичний, 204, 227
- швидкісний, 89
- Напруження
- дотичне, 22, 126, 131, 136
- — при ламінарній течії, 118
- зсуву, 300, 304, 305
- тертя сумарне, 131
- Насадка, 177, 189
- види, 189
- дифузорна, 189, 194
- коефіцієнти витікання, 195
- конічна
- — збіжна, 189
- — розбіжна, 189
- коноїдальна, 189, 195
- конфузорна, 189, 194
- циліндрична, 189
- — внутрішня, 189, 193
- — зовнішня, 189
- Нахил
- геометричний, 93
- гідравлічний, 92, 136, 151
- п'єзометричний, 93

О

- Об'єм тіла тиску, 63
- Остійність, 68
- Отвір
- великий, 187
- затоплений, 184
- малий, 178

П

- П'єзометр, 46
- Парадокс гідравлічний, 58

Параметр
 — пластичності, 308
 — Роуза, 209
 Паскаль, 19
 Переріз
 — гідравлічно найбільш вигідний, 258
 — живий, 79, 115
 Перехідний шар, 130
 Периметр змочений, 115
 Плавучість, 68
 Площина порівняння, 33
 Поверхня
 — вільна, 34
 — ізобарична, 34
 — п'єзометрична, 34
 — рівня, 34
 Подібність потоків
 — — геометрична, 289
 — — динамічна, 288, 290
 — — кінематична, 289
 Показник віскограми, 24
 Потік
 — бурхливий, 262
 — критичний, 262
 — спокійний, 262
 Потужність, 127
 Прес гідравлічний, 54
 Прискорення вільного падіння, 16
 Пробковий кран, 168
 П-теорема, 295
 Пуаз, 24
 Пульсація швидкості, 129

Р

Радіус
 — гідравлічний, 115, 116
 — метacentричний, 70
 Режим витікання
 — безвідривний, 190, 193
 — критичний, 190
 Режим руху
 — — ламінарний, 114
 — — турбулентний, 114
 Рівняння
 — безнапірної течії, 256
 — Бернуллі
 — — для потоку реальної рідини, 97
 — — для струминки реальної рідини, 92
 — — ідеальної рідини, 86
 — вільної поверхні диференціальне, 265

— гідравлічного стрибка, 269
 — гідростатики основне, 34
 — кількості руху, 106
 — Максвелла, 304
 — нерозривності, 79
 — — диференціальне, 80, 82
 — рівноваги рідини
 диференціальне, 32
 — руху ідеальної рідини, 84
 Рідина
 — бінгамівська пластична, 301
 — в'язкопружна, 304
 — дилатантна, 301, 302
 — ідеальна (нев'язка), 14
 — ньютонівська, 15, 300, 301
 — ньютонівська, 15, 300
 — псевдопластична, 301, 302
 — реальна (в'язка), 14
 — реопектична, 303
 — тиксотропна
 — — гістерезна петля, 303
 — тиксотропна, 303
 Розподіл швидкості в перерізі
 — — — при ламінарній течії, 119
 — — — при турбулентній течії, 135
 Розширення температурне, 26
 Рух рідини
 — — безнапірний, 76, 256
 — — вихровий, 76
 — — ламінарний, 112
 — — напірний, 76
 — — нерівномірний, 76, 263
 — — неусталений, 75, 195, 230
 — — — рівноприскорений, 230
 — — одномірний, 75
 — — рівномірний, 76
 — — турбулентний, 112
 — — усталений, 75

С

Сила
 — ваги, 16, 231
 — внутрішнього тертя, 290, 291
 — динамічного тиску
 — — на нерухому симетричну стінку, 249
 — — — на плоску перпендикулярну поверхню, 249
 — — — на рухому поверхню, 250
 — зовнішня, 16
 — інерції, 16, 231
 — лобового опору, 247

- масова, 16
- — одинична, 16, 31
- поверхнева, 16
- поверхневого натягу, 290, 291
- тертя, 17, 126, 231
- тиску, 17, 231, 290, 292
- тяжіння, 290, 291
- Спосіб
- Релея, 295
- Степінь ньютонівської поведінки рідини, 302
- Стики труб, 165
- Стисливість, 25
- Стиснення струмини, 192
- — неповне (недосконале), 178
- — повне (досконале), 178
- Стінка тонка, 179
- Стокс, 24
- Стрибок гідравлічний, 267
- Структура потоку
- — газорідинної суміші, 278
- — дисперсна, 278
- — емульсійна пінна, 278
- — кільцева, 278, 284, 285
- — пробкова, 278, 283, 284
- — розшарована, 278, 282
- Струмinka елементарна, 78
- — властивості, 78
- Струмiнь
- вертикальний, 253
- вільний, 251
- незатоплений, 251

Т

- Таран гідравлічний, 242
- Тахометр рідинний, 39
- Теорема
- Карно-Борда, 156
- Теорія
- змашення гідродинамічна, 125
- Прандтля, 131
- Течія
- ламінарна, 117
- — пластичних рідин, 310
- — початкова ділянка, 123
- — псевдопластичних рідин, 310
- турбулентна, 129
- Тиск
- вакуумметричний, 21
- гідростатичний, 17
- надлишковий, 20
- насичених парів, 26
- необхідний, 203
- середній в перерізі, 18

- Тракторія
- витікання, 184
- вільного струменя, 252
- руху, 77
- Трійник, 167
- Труби
- гідравлічно гладкі, 135, 138, 141, 143
- гідравлічно шорсткі, 135, 141
- Трубка
- Піто, 88
- течії, 77
- Трубопровід, 201
- безнапірний, 202
- всмоктувальний, 226
- довгий, 202
- короткий, 189, 202
- магістральний, 201, 202
- напірний, 202, 226
- основні задачі, 203
- пропускна здатність, 203, 207
- простий, 201, 203
- сифонний, 221
- складний, 201
- — кільцевий, 202, 219
- — паралельно сполучений, 201
- — послідовно сполучений, 201
- — розгалужений, 201
- Турбулентне ядро, 130

У

- Удар гідравлічний, 235
- — методи запобігання, 241
- — непряий, 240
- — прямиий, 240
- Умови
- нормальні (фізичні), 21
- стандартні (технічні), 21

Ф

- Фаза гідродуару, 236
- Формула
- Агроскіна, 258
- Альтшуля, 145
- Блазіуса, 145
- Вейсбаха, 156
- Дарсі, 121, 298
- Жуковського, 237
- Ідельчика, 160
- Ісаєва, 145
- Карно-Борда, 158
- Кольбрука, 145

- Конакова, 145
- Лейбензона, 148
- — коефіцієнти, 150
- Маннінга, 258
- Нікурадзе, 146
- Ньютона, 14, 23
- Павловського, 258
- Пуазейля, 120
- Стокса, 121
- Філонова, 24
- Шезі, 151
- Шифрінсона, 146
- Шіллера, 123
- Функція
- стрибкова, 269

X

- Хвиля
- біжуча, 263
 - стояча, 263

Ц

- Центр тиску, 60

Ч

- Час
- випорожнення
 - — вертикального циліндра, 196
 - — горизонтального циліндра, 198
 - витікання при змінному напорі, 196
- Число
- Вебера, 183
 - Вебера, 292
 - Грасгофа, 294
 - Ейлера, 292, 293
 - Нуссельта, 294
 - Пекле, 294
 - Рейнольдса, 113, 291

- — для некруглого перерізу, 115
- — для неньютонівських рідин, 307
- — для пластичних рідин, 311
- — критичне, 114
- — перехідне, 143, 147, 149
- — узагальнене, 307
- Струхалія, 294
- Фруда, 183, 262, 291
- Хедстрема, 311

Ш

- Швидкісний множник, 151
- Швидкість
- “ковзання” фаз, 275
 - газорідинної суміші, 275
 - динамічна, 133
 - динамічна, 136
 - звуку в газорідинній суміші, 277
 - зриму, 133
 - зсуву, 305
 - критична, 113, 114
 - — верхня, 113
 - — нижня, 113
 - максимальна, 119, 134
 - місцева, 89
 - — осереднена, 129
 - — при ламінарній течії, 119
 - — при турбулентній течії, 135
 - падіння тіла в рідині, 248
 - середня, 79, 120
 - ударної хвилі, 237, 239
 - фаз відносна, 275
 - хвилі, 263
- Швидкоплин, 262
- аерований, 266
- Шорсткість
- абсолютна, 137
 - відносна, 138
 - еквівалентна, 139
 - нерівномірна, 138
 - рівномірна, 138

**Лідія Володимирівна Возняк
Петро Романович Гімер
Михайло Іванович Мердух
Олександр Васильович Паневник**

ГІДРАВЛІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК